❸ 조건 (나)에서 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 β이면 β^3도 근이므로

$\beta^3=\overline{\beta}$ 또는 $\beta^3=\gamma$

(i) $\beta^3=\overline{\beta}$일 때, $\beta^4=\beta\overline{\beta}$이고 $\beta\overline{\beta}$는 0보다 큰 실수이므로

$\beta^4=k^2\ (k>0)$이라 하면

$\beta^2=-k$ 또는 $\beta^2=k$

이때 β는 허근이므로 $\beta^2=-k$

$\therefore \beta=\sqrt{k}i$ 또는 $\beta=-\sqrt{k}i$

따라서 $\beta^3=\overline{\beta}$에서

$(\sqrt{k}i)^3=-\sqrt{k}i$ 또는 $(-\sqrt{k}i)^3=\sqrt{k}i$

$\therefore k=1\ (\because k>0)$

$\therefore \beta=i$ 또는 $\beta=-i$

(ii) $\beta^3=\gamma$일 때, $\beta\neq0$이므로 ㉠에서

ⓘ $\gamma=1$이면 $\beta^3=1$이므로

$(\beta-1)(\beta^2+\beta+1)=0$

β는 허근이므로 $\beta=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

ⓘⓘ $\gamma=-1$이면 $\beta^3=-1$이므로

$(\beta+1)(\beta^2-\beta+1)=0$

β는 허근이므로 $\beta=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

❹ $f(x)=(x-\gamma)(x-\beta)(x-\overline{\beta})$이므로

$f(x)=(x+1)(x-i)(x+i)$

$=x^3+x^2+x+1$

또는

$f(x)=x(x-i)(x+i)$

$=x^3+x$

또는

$f(x)=(x-1)(x-i)(x+i)$

$=x^3-x^2+x-1$

또는

$f(x)=(x-1)(x^2+x+1)$

$=x^3-1$

또는

$f(x)=(x+1)(x^2-x+1)$

$=x^3+1$

따라서 $f(2)$의 값은 차례대로

15, 10, 5, 7, 9

이므로 $f(2)$의 값이 될 수 없는 것은 ④이다.

답 ④

일품 BOX

$\beta=p+qi\ (q\neq0)$일 때, $\overline{\beta}=p-qi$이므로 $\beta\overline{\beta}=p^2+q^2$ 이때 $q\neq0$이므로 $\beta\overline{\beta}>0$

Ⅲ 부등식

07 일차부등식

개념&핵심 기출

본책 68~70쪽

01 ㄱ. $ab>0$이므로 $a<b$의 양변을 ab로 나누면

$\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}$

ㄴ. $|a|>|b|$이므로 $a^2>b^2$

$ab>0$이므로 양변을 ab로 나누면

$\dfrac{a}{b}>\dfrac{b}{a}$

ㄷ. $a=-2,\ b=-1,\ c=2,\ d=1$이면 $a<b<0$, $c>d>0$이지만 $\dfrac{a}{c}=-1,\ \dfrac{b}{d}=-1$이므로

$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

02 ㄱ. $a=0.1,\ b=-1.1$이면 $0<a<1,\ b<-1$이지만 $a^2+b^2=0.01+1.21=1.22<2$이다.

ㄴ. $0<a<1$에서 $a^2<a$ …… ㉠

$b<-1$에서 $ab<-a$

$\therefore a<-ab$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2<-ab$

ㄷ. $0<a<1$에서 $\dfrac{1}{a}>1$

$b<-1$에서 $-1<\dfrac{1}{b}<0$

$\therefore \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>0$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

다른 풀이 ㄴ. $b<-1$에서 $-b>1$이므로

$a<-b$

$a>0$이므로 양변에 a를 곱하면

$a^2<-ab$

$a>0$이므로 부등식의 각 변에 a를 곱해도 부등식의 방향은 바뀌지 않는다.

$1<-b$이고 $a<1$이므로 $a<-b$

03 $1<f(1)<4$이므로

$1<a+b<4$ …… ㉠

$-2<f(2)<2$이므로

$-2<2a+b<2$ …… ㉡

㉠의 각 변에 2를 곱하면

$2<2a+2b<8$ …… ㉢

㉢−㉡을 하면 $2-2<b<8-(-2)$

$\therefore 0<b<10$

$f(0)=b$이므로

$0<f(0)<10$ 답 $0<f(0)<10$

참고 부등식의 사칙계산

$a<x<b$, $c<y<d$일 때

① $\begin{array}{rccccc} & a & < & x & < & b \\ +) & c & < & y & < & d \\ \hline & a+c & < & x+y & < & b+d \end{array}$

② $\begin{array}{rccccc} & a & < & x & < & b \\ -) & c & < & y & < & d \\ \hline & a-d & < & x-y & < & b-c \end{array}$

③ $\begin{array}{rccccc} & a & < & x & < & b \\ \times) & c & < & y & < & d \\ \hline & ac & < & xy & < & bd \end{array}$

④ $\begin{array}{rccccc} & a & < & x & < & b \\ \div) & c & < & y & < & d \\ \hline & \frac{a}{d} & < & \frac{x}{y} & < & \frac{b}{c} \end{array}$

(단, ③, ④는 a, b, c, d가 양수일 때 성립한다.)

04 $A-B=(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)$

$=a^2(a-b)-b^2(a-b)$

$=(a-b)(a^2-b^2)$

$=(a-b)(a+b)(a-b)$

$=(a+b)(a-b)^2$

이때 $a>0$, $b>0$이므로 $a+b>0$

또 $a\neq b$이므로 $(a-b)^2>0$

따라서 $A-B>0$이므로

$A>B$

답 $A>B$

$(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)$
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$-ab(a+b)$
$=(a+b)(a^2-2ab+b^2)$
$=(a+b)(a-b)^2$
과 같이 풀이할 수도 있다.

05 $A-B=(abc+1)-(a+bc)$

$=a(bc-1)-(bc-1)$

$=(a-1)(bc-1)$

그런데 $-1<a<1$이므로 $a-1<0$

또 $-1<b<1$, $-1<c<1$이므로

$-1<bc<1$

$\therefore bc-1<0$

따라서 $A-B>0$이므로

$A>B$

답 $A>B$

$-1<b<1$, $-1<c<1$
에서
$0\le|b|<1$,
$0\le|c|<1$
이므로
$0\le|b||c|<1$
즉 $0\le|bc|<1$이므로
$-1<bc<1$

06 $\frac{A}{B}=\frac{2^{30}}{5^{12}}=\frac{(2^5)^6}{(5^2)^6}=\left(\frac{2^5}{5^2}\right)^6=\left(\frac{32}{25}\right)^6>1$

이므로 $A>B$

$\frac{A}{C}=\frac{2^{30}}{3^{20}}=\frac{(2^3)^{10}}{(3^2)^{10}}=\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^{10}=\left(\frac{8}{9}\right)^{10}<1$

이므로 $A<C$

$\therefore B<A<C$

답 ③

07 부등식 $ax>b$의 해가 $x>-1$이므로

$a>0$ $\therefore x>\frac{b}{a}$

따라서 $\frac{b}{a}=-1$이므로 $b=-a$

이것을 $(a-b)x<a^2+ab+b$에 대입하면

$\{a-(-a)\}x<a^2+a\cdot(-a)-a$

$2ax<-a$

$a>0$이므로 $x<-\frac{1}{2}$

답 ③

주어진 부등식의 부등호의 방향과 해의 부등호의 방향이 같으므로 x의 계수는 양수이다.

08 $(a+b)x+a-2b>0$에서

$(a+b)x>-a+2b$

이 부등식의 해가 $x<\frac{2}{3}$이므로

$a+b<0$ $\therefore x<\frac{-a+2b}{a+b}$

주어진 부등식의 부등호의 방향과 해의 부등호의 방향이 다르므로 x의 계수는 음수이다.

따라서 $\frac{-a+2b}{a+b}=\frac{2}{3}$이므로

$2a+2b=-3a+6b$, $5a=4b$ $\therefore a=\frac{4}{5}b$

$a+b<0$에서

$a+b=\frac{4}{5}b+b=\frac{9}{5}b<0$ $\therefore b<0$

$a=\frac{4}{5}b$를 $(2a-b)x<a+b$에 대입하면

$\left(\frac{8}{5}b-b\right)x<\frac{4}{5}b+b$, $\frac{3}{5}bx<\frac{9}{5}b$

이때 $b<0$이므로 $x>3$

답 ⑤

09 $(a-b)x+2a+3b>0$에서

$(a-b)x>-2a-3b$

이 부등식의 해가 모든 실수이므로

$a-b=0$, $-2a-3b<0$

$a-b=0$에서 $b=a$이므로

$-2a-3b=-2a-3a=-5a<0$

$\therefore a>0$

$b=a$를 $(a+2b)x>b-2a$에 대입하면 $3ax>-a$

이때 $a>0$이므로 $x>-\frac{1}{3}$

답 ③

부등식 $ax>b$의 해가
① 없다. ➡ $a=0$, $b\ge0$
② 모든 실수이다.
➡ $a=0$, $b<0$

10 $2x+1<a-x$에서

$3x<a-1$ $\therefore x<\frac{a-1}{3}$

$x+4<3x+2a$에서

$-2x<2a-4$ $\therefore x>2-a$

주어진 연립부등식의 해가 $-2<x<b$이므로

$2-a=-2$, $\frac{a-1}{3}=b$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=1$

$\therefore a+b=5$

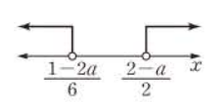
답 ⑤

11 $2(x-1)+a>0$에서

$2x>2-a$ $\therefore x>\frac{2-a}{2}$

$6x+2a<1$에서 $x<\frac{1-2a}{6}$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



$\frac{1-2a}{6}\le\frac{2-a}{2}$

$1-2a\le6-3a$ $\therefore a\le5$

따라서 자연수 a의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은 $1+2+3+4+5=15$ 답 ④

12 삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{BQ}=x$, $\overline{PQ}=36-2x$

$\overline{PQ}<\overline{AP}+\overline{BQ}$에서

$36-2x<x+x$, $-4x<-36$

$\therefore x>9$ …… ㉠

$\overline{PS}=\overline{QR}=x$이므로 직사각형 PQRS의 둘레의 길이는

$2\{(36-2x)+x\}=72-2x$

이고, 선분 AP를 한 변으로 하는 정사각형의 둘레의 길이는 $4x$이므로

$72-2x>4x$, $-6x>-72$

$\therefore x<12$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$9<x<12$

따라서 정수 x의 값은 10, 11이다. 답 10, 11

△ABC는 직각이등변삼각형이므로 $\angle A=45°$
△APS에서
$\angle ASP$
$=180°-90°-45°$
$=45°$
따라서 △APS도 직각이등변삼각형이므로
$\overline{AP}=\overline{PS}=x$

13 $x-2<2x+3$에서 $-x<5$

$\therefore x>-5$ …… ㉠

$2x+3<6-x$에서 $3x<3$

$\therefore x<1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-5<x<1$

따라서 정수 x는 -4, -3, -2, -1, 0의 5개이다.

답 ③

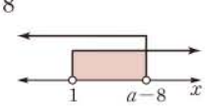
14 $6-x<x+4$에서

$-2x<-2$ $\therefore x>1$

$x+4<\frac{x+a}{2}$에서

$2x+8<x+a$ $\therefore x<a-8$

주어진 부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$a-8>1$ $\therefore a>9$

따라서 정수 a의 최솟값은 10이다. 답 ③

15 $x+2<ax+b$에서

$(1-a)x<b-2$ …… ㉠

$ax+b<x-a+3b$에서 $(a-1)x<-a+2b$

$(1-a)x>a-2b$ …… ㉡

(i) $1-a>0$, 즉 $a<1$일 때,

㉠에서 $x<\frac{b-2}{1-a}$, ㉡에서 $x>\frac{a-2b}{1-a}$이고, 주어진 부등식의 해가 $-1<x<4$이므로

$\frac{a-2b}{1-a}=-1$, $\frac{b-2}{1-a}=4$

$a-2b=-1+a$, $b-2=4-4a$

$b=\frac{1}{2}$, $4a+b=6$ $\therefore a=\frac{11}{8}$, $b=\frac{1}{2}$

그런데 $a<1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $1-a<0$, 즉 $a>1$일 때,

㉠에서 $x>\frac{b-2}{1-a}$, ㉡에서 $x<\frac{a-2b}{1-a}$이고, 주어진 부등식의 해가 $-1<x<4$이므로

$\frac{b-2}{1-a}=-1$, $\frac{a-2b}{1-a}=4$

$b-2=-1+a$, $a-2b=4-4a$

$a-b=-1$, $5a-2b=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$

(i), (ii)에서 $a=2$, $b=3$이므로

$a+b=5$ 답 ②

$p>0$일 때,
① $|x|<p$이면
$-p<x<p$
② $|x|>p$이면
$x<-p$ 또는
$x>p$

16 $|ax+3|\le b$에서 $-b\le ax+3\le b$

$-b-3\le ax\le b-3$

이때 $a>0$이므로 $\frac{-b-3}{a}\le x\le\frac{b-3}{a}$

주어진 부등식의 해가 $-4\le x\le 1$이므로

$\frac{-b-3}{a}=-4$, $\frac{b-3}{a}=1$

$-b-3=-4a$, $b-3=a$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=5$

$\therefore a+b=7$ 답 ③

17 $2|x-3|+|x-7|\le 8$에서

(i) $x<3$일 때,

$-2(x-3)-(x-7)\le 8$

$-3x\le -5$ $\therefore x\ge\frac{5}{3}$

그런데 $x<3$이므로 $\frac{5}{3}\le x<3$

(ii) $3\le x<7$일 때,

$2(x-3)-(x-7)\le 8$ $\therefore x\le 7$

그런데 $3\le x<7$이므로 $3\le x<7$

(iii) $x\ge 7$일 때,

$2(x-3)+(x-7)\le 8$

$3x\le 21$ $\therefore x\le 7$

그런데 $x\ge 7$이므로 $x=7$

이상에서 주어진 부등식의 해는 $\frac{5}{3}\le x\le 7$이므로 정수 x는 2, 3, 4, 5, 6, 7의 6개이다. 답 ②

18 $-3\le x\le 5$일 때, $x+3\ge 0$, $x-5\le 0$이므로 주어진 부등식은

$(x+3)-(x-5)>k$ $\therefore k<8$

따라서 주어진 부등식이 항상 성립하기 위한 자연수 k의 최댓값은 7이다. 답 ④

1등급을 위한 고난도 문제

본책 71~74쪽

01 ㄱ. $a=-\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$이면 $0<ab<1$이지만

$\frac{1}{a}=-2$이므로 $b>\frac{1}{a}$이다.

ㄴ. $b^2>0$이므로 $ab<1$의 양변을 b^2으로 나누면

$\frac{a}{b}<\frac{1}{b^2}$

ㄷ. $a^2>0$, $b^2>0$이므로 $0<ab<1$에서

$0<a^3b<a^2$, $0<ab^3<b^2$

$\therefore -b^2<a^3b-ab^3<a^2$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

02 ㄱ. $a=-2$, $b=2$이면 $\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$이지만 $b>a$이다.

ㄴ. $a^2b^2>0$이므로 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$의 양변에 a^2b^2을 곱하면

$ab^2<a^2b$

ㄷ. $a>0$이면 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$이므로 $b>0$

$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$의 양변에 b를 곱하면 $\frac{b}{a}<1$

$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$의 양변에 a를 곱하면 $1<\frac{a}{b}$

$\therefore \frac{b}{a}<\frac{a}{b}$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

03 $b^2c+ac^2+ab^2+a^2c=2abc$에서

$a(b^2+c^2)+c(a^2+b^2-2ab)=0$

$\therefore a(b^2+c^2)+c(a-b)^2=0$ …… ㉠ ··· ❶

$a=b$이면 ㉠에서 $a(b^2+c^2)=0$이어야 하므로

$a=0$ 또는 $b^2+c^2=0$

그런데 이것은 a, b, c가 0이 아닌 실수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore a\neq b$ ··· ❷

이때 ㉠에서 $a(b^2+c^2)=-c(a-b)^2$이므로

$-\frac{a}{c}=\frac{(a-b)^2}{b^2+c^2}>0$

따라서 $\frac{a}{c}<0$이므로

$ac<0$ ··· ❸

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	20 %
❷ $a\neq b$임을 알 수 있다.	40 %
❸ $ac<0$임을 보일 수 있다.	40 %

일품 BOX

0이 아닌 실수 b에 대하여 $b^2>0$

a^2+ab+b^2
$=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geq 0$
이때 등호는 $a=b=0$일 때 성립하는데 a, b는 서로 다른 두 실수이므로
$a^2+ab+b^2>0$

$a>b$의 양변에 b를 더하면
$a+b>2b$

04 $A-B=(ab+cd)-(ac+bd)$

$=a(b-c)-d(b-c)$

$=(a-d)(b-c)$

$a>d$, $b>c$에서 $a-d>0$, $b-c>0$이므로

$A-B>0$ $\therefore A>B$ …… ㉠

$B-C=(ac+bd)-(ad+bc)$

$=a(c-d)-b(c-d)$

$=(a-b)(c-d)$

$a>b$, $c>d$에서 $a-b>0$, $c-d>0$이므로

$B-C>0$ $\therefore B>C$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $A>B>C$ 답 ①

05 $a+b+c=0$에서 $b=-a-c$이므로

$b^2+\frac{1}{2}(a-c)^2-a^2-c^2$

$=(-a-c)^2+\frac{1}{2}(a-c)^2-a^2-c^2$

$=\frac{1}{2}(a-c)^2+\{(a+c)^2-a^2-c^2\}$

$=\frac{1}{2}(a-c)^2+2ac$

$=\frac{1}{2}\{(a-c)^2+4ac\}$

$=\frac{1}{2}(a+c)^2\geq 0$

(단, 등호는 $a+c=0$일 때 성립)

$\therefore b^2+\frac{1}{2}(a-c)^2\geq a^2+c^2$

답 풀이 참조

06 조건 (다)에서

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)>0$

이므로 $a-b>0$ $\therefore a>b$ …… ㉠

조건 (나)에서

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)<0$

이므로 $a+b<0$ ($\because$ ㉠)

㉠에서 $a+b>2b$이므로

$2b<0$ $\therefore b<0$ …… ㉡

조건 (가)에서 $ab<b$이고 $b<0$이므로 양변을 b로 나누면

$a>1$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $b<0<1<a$

$\therefore b<1<a$ 답 ④

07 $a^2+b^2+1-(ab+a+b)$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2-2ab-2a-2b)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\}\geq 0$

$\therefore a^2+b^2+1 \geq ab+a+b$

(단, 등호는 $a=b=1$일 때 성립)

답 풀이 참조

참고 등호는 $a-b=0$, $a-1=0$, $b-1=0$, 즉 $a=b=1$일 때 성립한다.

08 $a(2x+a)>b(x+1)$에서

$(2a-b)x>b-a^2$

이 부등식이 해를 갖지 않으므로

$2a-b=0,\ b-a^2 \geq 0$

이때 $b-a^2 \geq 0$에서 $b \geq a^2$이고 주어진 조건에서 $b \leq a^2$이므로 $b=a^2$ …… ㉠

이것을 $2a-b=0$에 대입하면

$2a-a^2=0,\quad a(2-a)=0$

그런데 $a \neq 0$이므로 $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$b=4$

$\therefore a+b=6$

답 ④

09 $|b| \leq 3$에서 $-3 \leq b \leq 3$ …… ㉠

$a(a+1)x+b<2x+a$에서

$(a^2+a-2)x<a-b$

$(a+2)(a-1)x<a-b$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$(a+2)(a-1)=0,\ a-b>0$

$(a+2)(a-1)=0$에서

$a=-2$ 또는 $a=1$

(i) $a=-2$일 때,

$a-b>0$에서 $b<-2$이므로

$b=-3$ ($\because$ ㉠)

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(-2,\ -3)$의 1개이다.

(ii) $a=1$일 때,

$a-b>0$에서 $b<1$이므로

$b=-3,\ -2,\ -1,\ 0$ ($\because$ ㉠)

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ -3)$, $(1,\ -2)$, $(1,\ -1)$, $(1,\ 0)$의 4개이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$1+4=5$

답 ③

10 주어진 부등식에서 $a+b+c=k$ $(k>0)$라 하면

$a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 $k>0$

$\dfrac{x-(b+c)}{a}+\dfrac{x-(c+a)}{b}+\dfrac{x-(a+b)}{c}>3$

$\dfrac{x-(k-a)}{a}+\dfrac{x-(k-b)}{b}+\dfrac{x-(k-c)}{c}>3$

$\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)x-\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)k+3>3$

$\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)(x-k)>0$

이때 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>0$이므로 $x-k>0$

$a>0,\ b>0,\ c>0$에서 $\dfrac{1}{a}>0,\ \dfrac{1}{b}>0,\ \dfrac{1}{c}>0$이므로 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>0$

$\therefore x>k$

주어진 부등식의 해가 $x>1$이므로

$k=1$

따라서 $a+b+c=1$에서 $b+c=1-a$이므로 부등식 $(b+c)x+2a>2$는

$(b+c)x>2(1-a),\quad (b+c)x>2(b+c)$

이때 $b+c>0$이므로 $x>2$

답 ④

다른 풀이 $a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 $abc>0$

부등식 $\dfrac{x-b-c}{a}+\dfrac{x-c-a}{b}+\dfrac{x-a-b}{c}>3$의 양변에 abc를 곱한 후 정리하면

$bcx-bc(b+c)+cax-ca(c+a)$

$+abx-ab(a+b)>3abc$

$(ab+bc+ca)x$

$>3abc+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

$=(b+c)a^2+(b^2+c^2+3bc)a+bc(b+c)$

a에 대하여 내림차순으로 정리한다.

$=\{(b+c)a+bc\}\{a+(b+c)\}$

$=(ab+bc+ca)(a+b+c)$

이때 $ab+bc+ca>0$이므로

$a>0,\ b>0,\ c>0$에서 $ab>0,\ bc>0,\ ca>0$이므로 $ab+bc+ca>0$

$x>a+b+c$

주어진 부등식의 해가 $x>1$이므로

$a+b+c=1\quad \therefore b+c=1-a$

부등식 $(b+c)x+2a>2$에서

$(b+c)x>2(1-a),\quad (b+c)x>2(b+c)$

이때 $b+c>0$이므로 $x>2$

11 $a(x-a^2)>b(x-ab)$에서

$(a-b)x>a^3-ab^2$

$(a-b)x>a(a+b)(a-b)$ …… ㉠

ㄱ. $a=b$이면 $a-b=0$, $a(a+b)(a-b)=0$이므로 ㉠에서 $0 \cdot x>0$

따라서 이 부등식의 해는 없다.

ㄴ. 부등식의 해가 $x>0$이므로 ㉠에서

$a-b>0\quad \therefore x>a(a+b)$

따라서 $a(a+b)=0$에서 $a>0$이므로

$a+b=0$

즉 $b=-a$이므로 $b<0$

ㄷ. 부등식의 해가 $x<a$이므로 ㉠에서

$a-b<0\quad \therefore x<a(a+b)$

따라서 $a(a+b)=a$에서 $a \neq 0$이므로

$a+b=1\quad \therefore b=1-a$

$a-b<0$에 $b=1-a$를 대입하면

$a-(1-a)<0,\quad 2a<1$

$\therefore a<\dfrac{1}{2}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

12 $3x-1\geq 2x+a$에서

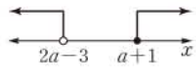
$x\geq a+1$

$4a-x>x+6$에서

$-2x>-4a+6$

$\therefore x<2a-3$ ⋯ ❶

주어진 연립부등식을 만족시키는 실수 x가 존재하지 않으려면 오른쪽 그림에서



$2a-3\leq a+1$ $\quad\therefore a\leq 4$ ⋯ ❷

따라서 a의 최댓값은 4이다. ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 각 일차부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ a의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

13 부등식 $(a+b)x<a-b$의 해가 $x<\frac{1}{3}$이므로

$a+b>0$ $\quad\therefore x<\frac{a-b}{a+b}$

따라서 $\frac{a-b}{a+b}=\frac{1}{3}$이므로

$3a-3b=a+b,\quad 2a=4b$

$\therefore a=2b$

이때 $a+b>0$에서 $2b+b=3b>0$이므로

$b>0$

$a=2b$를 $ax+2a+b>0$에 대입하면

$2bx+2\cdot 2b+b>0,\quad 2bx>-5b$

이때 $b>0$이므로 $\quad x>-\frac{5}{2}$ ⋯⋯ ㉠

$a=2b$를 $(a-b)x<2a-3b$에 대입하면

$(2b-b)x<2\cdot 2b-3b,\quad bx<b$

이때 $b>0$이므로 $\quad x<1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-\frac{5}{2}<x<1$

따라서 정수 x는 -2, -1, 0의 3개이다. 답 ③

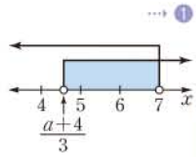
14 $-x+a<2x-4$에서

$-3x<-a-4$ $\quad\therefore x>\frac{a+4}{3}$

$\frac{3x-1}{2}<x+3$에서

$3x-1<2x+6$ $\quad\therefore x<7$ ⋯ ❶

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이려면 오른쪽 그림에서



$4\leq\frac{a+4}{3}<5,\quad 12\leq a+4<15$

$\therefore 8\leq a<11$ ⋯ ❷

$\frac{a+4}{3}=4$이면 정수인 해는 5, 6의 2개이고, $\frac{a+4}{3}=5$이면 정수인 해는 6의 1개이다.

따라서 정수 a의 값은 8, 9, 10이므로 구하는 합은

$8+9+10=27$ ⋯ ❸

답 27

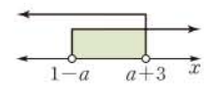
채점 기준	비율
❶ 각 일차부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 정수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

15 $2x+a>x+1$에서 $\quad x>1-a$

$3x-6<x+2a$에서

$2x<2a+6$ $\quad\therefore x<a+3$

이때 주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$1-a<a+3$

$-2a<2$ $\quad\therefore a>-1$ ⋯⋯ ㉠

또 주어진 연립부등식을 만족시키는 음수 x가 존재하지 않으므로

$1-a\geq 0$ $\quad\therefore a\leq 1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1<a\leq 1$ 답 ②

16 이 동아리의 회원 수를 x라 하면 1인당 2000원씩 낸 총금액은 필요한 경비보다 1000원이 많으므로 필요한 경비는

활용 문제는 구하려는 것을 x로 놓고 식을 세운다.

$2000x-1000$(원)

1인당 1500원씩 낸 총금액은 필요한 경비보다 6000원 미만 적으므로

$(2000x-1000)-1500x<6000$

$500x<7000$ $\quad\therefore x<14$ ⋯⋯ ㉠

1인당 2500원씩 낸 총금액은 필요한 경비보다 7500원 이상 많으므로

$2500x-(2000x-1000)\geq 7500$

$500x\geq 6500$ $\quad\therefore x\geq 13$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad 13\leq x<14$

따라서 동아리 회원 수는 13이다. 답 ③

17 2월 한 달 동안 외식비에서 x %, 나머지 항목에서 4 %를 줄인 금액은

$40\cdot\frac{x}{100}+160\cdot\frac{4}{100}$(만 원)

1월의 월 소비 총액이 200만 원이고, 외식비가 40만 원이므로 나머지 항목의 총액은 160만 원이다.

이고, 이것은 1월의 월 소비 총액의 5 % 이상을 줄인 금액이므로

$40\cdot\frac{x}{100}+160\cdot\frac{4}{100}\geq 200\cdot\frac{5}{100}$

$4x+64\geq 100$

$\therefore x\geq 9$ ⋯⋯ ㉠

2월 한 달 동안 외식비에서 4 %, 나머지 항목에서 x %를 줄인 금액은

$$40\cdot\frac{4}{100}+160\cdot\frac{x}{100}(\text{만 원})$$

이고, 이것은 1월의 월 소비 총액의 10 % 이하를 줄인 금액이므로

$$40\cdot\frac{4}{100}+160\cdot\frac{x}{100}\le 200\cdot\frac{10}{100}$$

$16+16x\le 200$

$16x\le 184 \qquad \therefore x\le 11.5 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$9\le x\le 11.5$ 　　답 $9\le x\le 11.5$

18 $x+1<2x+a$에서

$-x<a-1 \qquad \therefore x>1-a$

$2x+a<-x+b$에서

$3x<b-a \qquad \therefore x<\frac{b-a}{3}$

주어진 부등식의 해가 $3<x<4$이므로

$1-a=3,\ \frac{b-a}{3}=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-2,\ b=10$

$\therefore a+b=8$ 　　답 ④

19 $3x-1<x+a$에서

$2x<a+1 \qquad \therefore x<\frac{a+1}{2}$

$x+a<2x+3a$에서

$-x<2a \qquad \therefore x>-2a$ 　　··· ❶

주어진 부등식의 해가 $\alpha<x<\beta$이므로

$\alpha=-2a,\ \beta=\frac{a+1}{2}$ 　　··· ❷

$\beta-\alpha=5$에서 $\quad \frac{a+1}{2}-(-2a)=5$

$\frac{5}{2}a=\frac{9}{2} \qquad \therefore a=\frac{9}{5}$ 　　··· ❸

답 $\frac{9}{5}$

채점 기준	비율
❶ 각 일차부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❷ α, β를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

20 $ax+2<x+1$에서

$(a-1)x<-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$x+1<2x+b$에서

$-x<b-1 \qquad \therefore x>1-b \qquad \cdots\cdots ㉡$

(i) $a-1<0$일 때,

㉠에서 $\quad x>-\frac{1}{a-1} \qquad \cdots\cdots ㉢$

이때 ㉡, ㉢의 공통부분이 존재하므로 주어진 부등식은 해를 갖는다.

두 부등식의 부등호의 방향이 같으므로 공통부분이 항상 존재한다.

(ii) $a-1=0$일 때,

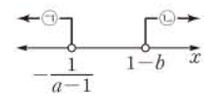
㉠에서 $0\cdot x<-1$이므로 해가 없다.

$\therefore (a-1)(b-1)=0$

(iii) $a-1>0$일 때,

㉠에서 $\quad x<-\frac{1}{a-1}$

주어진 부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



$-\frac{1}{a-1}\le 1-b$

$a-1>0$이므로 양변에 $a-1$을 곱하면

$-1\le(1-b)(a-1)$

$\therefore (a-1)(b-1)\le 1$

이상에서 $(a-1)(b-1)$의 최댓값은 1이다. 　　답 ①

21 부등식 $ax<2a-b$의 해가 $x>\frac{3}{2}$이므로

$a<0 \qquad \therefore x>\frac{2a-b}{a}$

따라서 $\frac{2a-b}{a}=\frac{3}{2}$이므로

$4a-2b=3a \qquad \therefore a=2b$

또 $a<0$이므로 $\quad b<0$

$ax+b<bx$에서 $\quad (a-b)x<-b$

$(2b-b)x<-b, \qquad bx<-b$

이때 $b<0$이므로 $\quad x>-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$bx<2ax-a$에서 $\quad (b-2a)x<-a$

$(b-2\cdot 2b)x<-2b, \qquad -3bx<-2b$

이때 $b<0$이므로 $\quad x<\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots ㉡$

$b<0$이므로 $-3b>0$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1<x<\frac{2}{3}$ 　　답 $-1<x<\frac{2}{3}$

22 사각형 ABCD의 넓이는 $\quad 8\cdot 6=48$

삼각형 APM의 넓이는 $\quad \frac{1}{2}\cdot x\cdot 4=2x$

삼각형 PBC의 넓이는 $\quad \frac{1}{2}\cdot(6-x)\cdot 8=24-4x$

$\overline{PB}=\overline{AB}-\overline{AP}$
$=6-x$

삼각형 CDM의 넓이는 $\quad \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4=12$

따라서 삼각형 MPC의 넓이는

$48-\{2x+(24-4x)+12\}=2x+12$

한편 두 삼각형 APM, PBC의 넓이의 합은

$2x+(24-4x)=24-2x$

또 사각형 PBCQ의 넓이는

$(6-x)\cdot 8=48-8x$

이므로 주어진 조건에서

$24-2x<2x+12<48-8x$

$24-2x<2x+12$에서

$-4x<-12 \quad \therefore x>3$ ..... ㉠

$2x+12<48-8x$에서

$10x<36 \quad \therefore x<3.6$ ..... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$3<x<3.6$ 답 $3<x<3.6$

23 $\left|\frac{x}{n}-8\right|\le 2$에서 $\quad -2\le\frac{x}{n}-8\le 2$

$6\le\frac{x}{n}\le 10 \quad \therefore 6n\le x\le 10n$

위의 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 13이므로

$10n-6n+1=13, \quad 4n=12$

$\therefore n=3$ 답 3

1등급 비밀노트

부등식을 만족시키는 정수 A의 개수 (단, m, n은 정수)

① $m\le A\le n$ ➡ $n-m+1$

② $m<A\le n$ ➡ $n-m$

③ $m<A<n$ ➡ $n-m-1$

24 $|2x+1|<5$에서

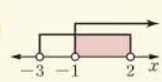
$-5<2x+1<5, \quad -6<2x<4$

$\therefore -3<x<2$

$ax+2a-b<0$에서

$ax<-2a+b$ ..... ㉠

연립부등식의 해가 $-1<x<2$이므로 부등식 ㉠의 해는 $x>-1$이어야 한다.



㉠에서 $\quad a<0 \quad \therefore x>\frac{-2a+b}{a}$

따라서 $\frac{-2a+b}{a}=-1$이므로 $\quad -2a+b=-a$

$\therefore a=b$

부등식 $(a+b)x+a-3b>0$에서

$2ax-2a>0, \quad ax>a$

$a<0$이므로 $\quad x<1$ 답 ①

25 $|x-3|\ge 2$에서

$x-3\le -2$ 또는 $x-3\ge 2$

$\therefore x\le 1$ 또는 $x\ge 5$ ..... ㉠

$||x|-1|\le 1$에서 $\quad -1\le|x|-1\le 1$

$0\le|x|\le 2 \quad \therefore -2\le x\le 2$ ..... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad -2\le x\le 1$

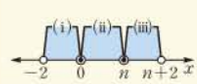
따라서 정수 x는 -2, -1, 0, 1의 4개이다.

답 ④

일품 BOX

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x의 값 1, 2를 기준으로 범위를 나눈다.

△APM+△PBC<△MPC<□PBCQ



26 (i) $x<1$일 때,

$|x-1|+|x-2|=-(x-1)-(x-2)$

$=-2x+3$

$x<1$에서 $-2x>-2$이므로

$-2x+3>1$

(ii) $1\le x<2$일 때,

$|x-1|+|x-2|=(x-1)-(x-2)$

$=1$

(iii) $x\ge 2$일 때,

$|x-1|+|x-2|=(x-1)+(x-2)$

$=2x-3$

$x\ge 2$에서 $2x\ge 4$이므로

$2x-3\ge 1$

이상에서 $|x-1|+|x-2|\ge 1$이므로 부등식 $|x-1|+|x-2|<a$의 해가 존재하지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위는 $\quad a\le 1$ 답 ②

27 $f(n, n+4)$의 값은 부등식

$|x|+|x-n|<n+4$ ..... ㉠

를 만족시키는 정수 x의 개수와 같다.

(i) $x<0$일 때, ㉠에서

$-x-(x-n)<n+4$

$-2x<4 \quad \therefore x>-2$

그런데 $x<0$이므로 $\quad -2<x<0$ ··· ❶

(ii) $0\le x<n$일 때, ㉠에서

$x-(x-n)<n+4$

$\therefore n<n+4$

따라서 해는 모든 실수이다.

그런데 $0\le x<n$이므로 $\quad 0\le x<n$ ··· ❷

(iii) $x\ge n$일 때, ㉠에서

$x+(x-n)<n+4$

$2x<2n+4 \quad \therefore x<n+2$

그런데 $x\ge n$이므로 $\quad n\le x<n+2$ ··· ❸

이상에서 주어진 부등식의 해는 $-2<x<n+2$이므로 정수 x의 개수는

$(n+2)-(-2)-1=n+3$

$\therefore f(n, n+4)=n+3$ ··· ❹

따라서 $f(n, n+4)=10$에서

$n+3=10$

$\therefore n=7$ ··· ❺

답 7

채점 기준	비율
❶ $x<0$일 때 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❷ $0\le x<n$일 때 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❸ $x\ge n$일 때 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❹ $f(n, n+4)$를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	10 %
❺ n의 값을 구할 수 있다.	30 %

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 75쪽

01 a, b, c, d, e가 연속하는 5개의 정수이므로 조건 ㈎에 의하여

$a=c-2,\ b=c-1,\ d=c+1,\ e=c+2$

라 하자.

조건 ㈏에 의하여

$(c-2)+(c-1)<c+1$

$\therefore c<4$

조건 ㈐에 의하여

$(c-2)^2+c^2=(c+2)^2$

$c^2-8c=0,\quad c(c-8)=0$

$\therefore c=0$ 또는 $c=8$

그런데 $c<4$이므로 $\quad c=0$

따라서 $a=-2,\ b=-1,\ d=1,\ e=2$이므로

$b^2+d^2=(-1)^2+1^2=2$ 답 2

1등급 비밀노트

문제에서 연속하는 정수 조건이 있을 때, 연속하는 세 정수는 $a-1$, a, $a+1$로 놓고, 연속하는 5개의 정수는 $a-2$, $a-1$, a, $a+1$, $a+2$로 놓으면 편리하다.

02 ㄱ. $a+b=1$에서

$a=1-b$

이때 $0<a<b$이므로

$0<1-b<b$

$0<1-b$에서 $\quad b<1$

$1-b<b$에서 $\quad b>\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{2}<b<1$

ㄴ. $(a^2+b^2)-b=a^2+b(b-1)$

$=a^2-ab$

$=a(a-b)<0$

$\therefore a^2+b^2<b$

$a+b=1$이므로 $b-1=-a$

$a>0$이고, $a<b$에서 $a-b<0$이므로 $a(a-b)<0$

ㄷ. $a+b=1$에서 $\quad b=1-a$

ㄱ에서 $\frac{1}{2}<b<1$이므로

$\frac{1}{2}<1-a<1$

$-\frac{1}{2}<-a<0 \qquad \therefore 0<a<\frac{1}{2}$

$\therefore 2a^2+b^2=2a^2+(1-a)^2$

$=3a^2-2a+1$

$=3\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$

따라서 $0<a<\frac{1}{2}$에서 $2a^2+b^2$은 $a=\frac{1}{3}$일 때 최솟값 $\frac{2}{3}$를 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

다른 풀이 ㄱ. $a<b$의 양변에 b를 더하면

$a+b<2b$

$a+b=1$이므로

$1<2b \qquad \therefore b>\frac{1}{2}$

03 $c-a>a-b>b-c$에서

$c-a>a-b$ …… ㉠

$a-b>b-c$ …… ㉡

(i) a, b, c 중 가장 큰 수를 a라 하면

$a>b$, $a>c$이므로 $c-a<0$, $a-b>0$

$c-a<0,\ a-b>0$

이므로 ㉠을 만족시키는 a, b, c가 존재하지 않는다.

(ii) a, b, c 중 가장 큰 수를 b라 하면

$b>a$, $b>c$이므로 $a-b<0$, $b-c>0$

$a-b<0,\ b-c>0$

이므로 ㉡을 만족시키는 a, b, c가 존재하지 않는다.

(iii) a, b, c 중 가장 큰 수를 c라 하면

$c>a$, $c>b$이므로 $c-a>0$, $b-c<0$

$c-a>0,\ b-c<0$

이므로 a, b, c의 값에 따라 주어진 부등식이 성립한다.

이상에서 $a<c$, $b<c$이고, a, b의 대소는 비교할 수 없으므로 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

04 $|x-a|\le b$에서

$-b\le x-a\le b$

$\therefore a-b\le x\le a+b$

$ax+b<bx+2a$에서

$(a-b)x<2a-b$ …… ㉢

ㄱ. 부등식 ㉠의 해가 $0\le x\le 2$이면

$a-b=0,\ a+b=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=1$

㉢에서 $0\cdot x<1$이므로 부등식 ㉡의 해는 모든 실수이다.

ㄴ. 부등식 ㉠의 해가 $1\le x\le 3$이면

$a-b=1,\ a+b=3$

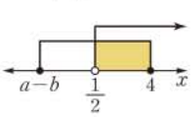
위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=1$

㉢에서 $\quad x<3$

따라서 연립부등식의 해는 $1\le x<3$이다.

ㄷ. 연립부등식의 해가 $\frac{1}{2}<x\le 4$



이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로 부등식 ㉢의 해가

$x>\frac{1}{2}$이어야 한다.

즉 ㉢에서 $\quad a-b<0$

$\therefore x>\frac{2a-b}{a-b}$

따라서 $\frac{2a-b}{a-b}=\frac{1}{2}$이므로

$4a-2b=a-b$

$\therefore b=3a$

또 부등식 ㉠의 해가 $a-b\le x\le 4$이어야 하므로

$a+b=4$

$b=3a$를 위의 식에 대입하면

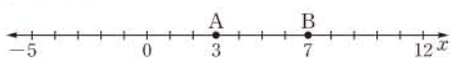
$4a=4 \qquad \therefore a=1$

$\therefore a=1,\ b=3$

따라서 부등식 ㉠의 해는 $1-3\le x\le 1+3$, 즉 $-2\le x\le 4$이므로 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$의 7개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

05 다음과 같이 사무실을 원점으로 하고 10 m를 1로 하는 수직선을 그려 식당을 점 A(3), 오락실을 점 B(7), 숙소를 점 P(x)($-5\le x\le 12$, $x\ne 0$, $x\ne 3$, $x\ne 7$)라 하자.



$\overline{AP}=|x-3|$, $\overline{BP}=|x-7|$이므로 조건을 만족시키는 숙소는

$\overline{AP}+\overline{BP}=|x-3|+|x-7|\le 8$

을 만족시키는 정수 x의 값을 좌표로 하는 점 P(x)인 지점에 있다.

(i) $-5\le x<0$ 또는 $0<x<3$일 때,

$-(x-3)-(x-7)\le 8$

$-2x\le -2 \qquad \therefore x\ge 1$

그런데 $-5\le x<0$ 또는 $0<x<3$이므로

$1\le x<3$

(ii) $3<x<7$일 때,

$(x-3)-(x-7)\le 8$에서 $4\le 8$이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $3<x<7$이므로

$3<x<7$

(iii) $7<x\le 12$일 때,

$(x-3)+(x-7)\le 8$

$2x\le 18 \qquad \therefore x\le 9$

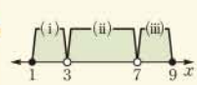
그런데 $7<x\le 12$이므로

$7<x\le 9$

이상에서 부등식 $|x-3|+|x-7|\le 8$의 해는

$1\le x<3$ 또는 $3<x<7$ 또는 $7<x\le 9$

따라서 조건을 만족시키는 숙소는 점 P(1), P(2), P(4), P(5), P(6), P(8), P(9)인 지점에 있으므로 7개이다. 답 ②



일품 BOX

$\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$이므로 $2<\sqrt{5}<3$

$a=5$이면 정수 x는 3, 4의 2개, $a=6$이면 정수 x는 3, 4, 5의 3개이다.

$a>\frac{1}{3}$이면 $\frac{1}{a}<3$

$a<0$이면 $\frac{1}{a}<0$이므로 $\frac{1}{a}<3$

08 이차부등식

개념&핵심 기출

본책 76~78쪽

01 이차방정식 $x^2-6x+4=0$의 해는

$x=3\pm\sqrt{5}$

이므로 이차부등식 $x^2-6x+4\le 0$의 해는

$3-\sqrt{5}\le x\le 3+\sqrt{5}$

이때 $2<\sqrt{5}<3$이므로

$3-\sqrt{5}=0.\times\times\times$, $3+\sqrt{5}=5.\times\times\times$

따라서 정수 x는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다. 답 5

02 $x^2-(a+2)x+2a<0$에서

$(x-2)(x-a)<0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

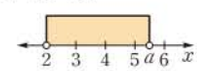
(i) $a<2$이면 부등식 ㉠의 해는 $\quad a<x<2$

그런데 a는 자연수이므로 이 부등식을 만족시키는 정수 x는 없다.

(ii) $a=2$이면 부등식 ㉠은 $(x-2)^2<0$이므로 해는 없다.

(iii) $a>2$이면 부등식 ㉠의 해는 $\quad 2<x<a$

이 부등식을 만족시키는 정수 x가 3개이려면 오른쪽 그림에서



$5<a\le 6$

이때 a는 자연수이므로 $\quad a=6$

이상에서 구하는 a의 값은 6이다. 답 6

1등급 비밀노트

마지막 단계에서 $5<a<6$, $5\le a<6$ 등과 같이 오답을 구하기 쉬운 문제이다. 이러한 유형의 문제는 등호를 포함시켰을 때 주어진 조건을 만족시키지 않으면 등호를 제외하고, 만족시키면 등호를 포함하는 방법으로 해결하는 것이 좋다.

03 ㄱ. $a>\frac{1}{3}$이면 주어진 부등식은

$(x-3)\left(x-\frac{1}{a}\right)<0 \qquad \therefore \frac{1}{a}<x<3$

ㄴ. $a=\frac{1}{3}$이면 주어진 부등식은

$(x-3)\left(\frac{1}{3}x-1\right)<0, \qquad (x-3)^2<0$

따라서 해는 없다.

ㄷ. $a<0$이면 주어진 부등식은

$(x-3)\left(x-\frac{1}{a}\right)>0 \qquad \therefore x<\frac{1}{a}$ 또는 $x>3$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

04 $2x^2-5x+2<0$에서 $\quad (2x-1)(x-2)<0$

$\therefore \frac{1}{2}<x<2$

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=2$이므로 해가 $-\frac{\beta}{2}<x<-\frac{\alpha}{2}$, 즉 $-1<x<-\frac{1}{4}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)\left(x+\frac{1}{4}\right)<0 \qquad \therefore x^2+\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}<0$

양변에 4를 곱하면 $4x^2+5x+1<0$이므로

$a=4,\ b=5 \qquad \therefore a+b=9$ 답 9

05 해가 $x\le-2$ 또는 $x\ge3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-3)\ge0$

$\therefore x^2-x-6\ge0$ …… ㉠

부등식 $ax^2+bx+c\le0$과 부등식 ㉠의 부등호의 방향이 다르므로 $a<0$

따라서 ㉠의 양변에 a를 곱하면 $ax^2-ax-6a\le0$

이 부등식이 $ax^2+bx+c\le0$과 같으므로

$b=-a,\ c=-6a$

이것을 $bx^2+ax-c<0$에 대입하면

$-ax^2+ax+6a<0, \qquad x^2-x-6<0$

$(x+2)(x-3)<0 \qquad \therefore -2<x<3$

답 $-2<x<3$

$a<0$에서 $-a>0$이므로 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

06 이차방정식 $x^2-4x+5k=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$ …… ㉠

$\alpha\beta=5k$ …… ㉡

또 두 근의 차가 6이므로

$\beta-\alpha=6$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $\alpha=-1,\ \beta=5$

이것을 ㉡에 대입하면

$-5=5k \qquad \therefore k=-1$

따라서 해가 $k+1\le x\le k+5$, 즉 $0\le x\le4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$x(x-4)\le0 \qquad \therefore x^2-4x\le0$

이 부등식이 $x^2+ax+b\le0$과 같으므로

$a=-4,\ b=0 \qquad \therefore a+b=-4$ 답 ②

$k=-1$이므로 $k+1=0,\ k+5=4$

07 $x^2-2k(x+1)+15\ge0$에서

$x^2-2kx-2k+15\ge0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차방정식 $x^2-2kx-2k+15=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(-2k+15)\le0$

$k^2+2k-15\le0, \qquad (k+5)(k-3)\le0$

$\therefore -5\le k\le3$ 답 ①

08 $kx^2-2kx+1<x^2+4x+5$에서

$(1-k)x^2+2(2+k)x+4>0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$1-k>0 \qquad \therefore k<1$ …… ㉠

이차방정식 $(1-k)x^2+2(2+k)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2+k)^2-4(1-k)<0$

$k^2+8k<0, \qquad k(k+8)<0$

$\therefore -8<k<0$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-8<k<0$

따라서 정수 k의 최댓값은 -1이다. 답 -1

09 이차부등식 $ax^2-(a-6)x+a-6>0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$ax^2-(a-6)x+a-6\le0$

이 성립해야 하므로 $a<0$ …… ㉠

이차방정식 $ax^2-(a-6)x+a-6=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a-6)\}^2-4a(a-6)\le0$

$-3a^2+12a+36\le0, \qquad (a+2)(a-6)\ge0$

$\therefore a\le-2$ 또는 $a\ge6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $a\le-2$

따라서 실수 a의 최댓값은 -2이다. 답 ②

10 $x^2-x-6<0$에서 $(x+2)(x-3)<0$

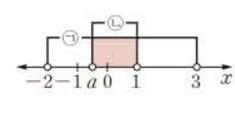
$\therefore -2<x<3$ …… ㉠

$x^2-(a+1)x+a<0$에서

$(x-a)(x-1)<0$ …… ㉡

(i) $a<1$일 때,

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 오직 1개뿐이려면 오른쪽 그림에서



$-1\le a<0$

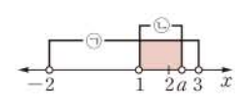
$a=0$이면 ㉡은 $0<x<1$이므로 정수인 해는 없다.

(ii) $a=1$일 때,

㉡에서 $(x-1)^2<0$이므로 해는 없다.

(iii) $a>1$일 때,

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 오직 1개뿐이려면 오른쪽 그림에서



$a>2$

$a=2$이면 ㉡은 $1<x<2$이므로 정수인 해는 없다.

이상에서 $-1\le a<0$ 또는 $a>2$ 답 ④

11 (i) 부등식 $x-a<x^2-a^2$에서

$x^2-x-a(a-1)>0$

$(x-a)(x+a-1)>0$

이때 a가 자연수이므로 $x<1-a$ 또는 $x>a$

(ii) 부등식 $x^2-a^2\le x+a$에서

$x^2-x-a(a+1)\le0$

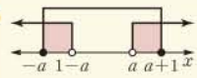
$(x+a)(x-a-1)\le0$

이때 a가 자연수이므로 $-a\le x\le a+1$

(i), (ii)에서 $-a<1-a<a<a+1$이므로 주어진 부등식의 해는 $-a\le x<1-a$ 또는 $a<x\le a+1$

이것이 $-3\le x<-2$ 또는 $b<x\le b+1$과 같으므로

$a=b=3$ $\therefore a+b=6$ 답 ③



a, $a+1$은 자연수이므로 $-a\le x<1-a$는 $-3\le x<-2$와 같고 $a<x\le a+1$은 $b<x\le b+1$과 같다.

12 조건 (가)에서 가로, 세로의 길이는 양수이므로

$n-2>0$, $n>0$

$\therefore n>2$ …… ㉠

조건 (나)에서

$2\{n(n-2)+2n+2(n-2)\}>88$

$n^2+2n-48>0$, $(n+8)(n-6)>0$

$\therefore n<-8$ 또는 $n>6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $n>6$

따라서 자연수 n의 최솟값은 7이다. 답 7

13 이차방정식 $x^2-ax+a^2-3a=0$의 서로 다른 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식의 두 근이 모두 양수이려면

(i) $D=(-a)^2-4(a^2-3a)>0$

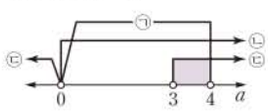
$3a^2-12a<0$, $3a(a-4)<0$

$\therefore 0<a<4$ …… ㉠

(ii) $\alpha+\beta=a>0$ …… ㉡

(iii) $\alpha\beta=a^2-3a>0$, $a(a-3)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>3$ …… ㉢



이상에서 공통부분을 구하면

$3<a<4$ 답 ③

14 이차방정식 $x^2+2ax+6-a=0$의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식의 두 근이 모두 음수이려면

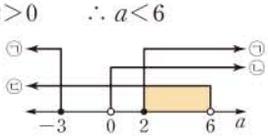
(i) $\frac{D}{4}=a^2-(6-a)\ge 0$

$a^2+a-6\ge 0$, $(a+3)(a-2)\ge 0$

$\therefore a\le -3$ 또는 $a\ge 2$ …… ㉠

(ii) $\alpha+\beta=-2a<0$ $\therefore a>0$ …… ㉡

(iii) $\alpha\beta=6-a>0$ $\therefore a<6$ …… ㉢



이상에서 공통부분을 구하면 $2\le a<6$

따라서 정수 a는 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은 14이다.

답 14

15 이차방정식 $x^2+(2m-3)x+m^2-4m=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=m^2-4m<0$, $m(m-4)<0$

$\therefore 0<m<4$ …… ㉠

음의 근의 절댓값이 양의 근보다 크려면

$\alpha+\beta=-(2m-3)<0$, $2m-3>0$

$\therefore m>\frac{3}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{3}{2}<m<4$

따라서 정수 m은 2, 3의 2개이다. 답 ②

16 $f(x)=x^2-2kx+2-k$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 근이 모두 1보다 작으므로 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

(i) $\frac{D}{4}=(-k)^2-(2-k)>0$에서

$k^2+k-2>0$, $(k+2)(k-1)>0$

$\therefore k<-2$ 또는 $k>1$

(ii) $f(1)=1-2k+2-k>0$ $\therefore k<1$

(iii) $-\frac{-2k}{2}=k<1$

이상에서 공통부분을 구하면 $k<-2$

따라서 정수 k의 최댓값은 -3이다. 답 -3

17 $f(x)=x^2+(a^2-5)x+7a$라 하자.

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 3이 있으려면

$f(3)=9+3(a^2-5)+7a<0$

$3a^2+7a-6<0$, $(a+3)(3a-2)<0$

$\therefore -3<a<\frac{2}{3}$ 답 ②

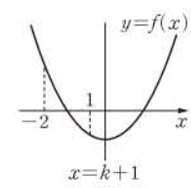
18 $x^2+x-2=0$에서 $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

즉 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k^2-2=0$의 서로 다른 두 근 중에서 한 근만이 -2와 1 사이에 있어야 한다.

$f(x)=x^2-2(k+1)x+k^2-2$라 하면 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은

$x=-\frac{-2(k+1)}{2}=k+1$



k는 자연수이므로 $k+1>1$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같아야 한다.

$f(-2)>0$에서 $4+4k+4+k^2-2>0$

$k^2+4k+6>0$, $(k+2)^2+2>0$

$\therefore k$는 모든 실수 …… ㉠

$f(1)<0$에서 $1-2k-2+k^2-2<0$

$k^2-2k-3<0$, $(k+1)(k-3)<0$

$\therefore -1<k<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-1<k<3$

따라서 자연수 k는 1, 2이므로 구하는 합은 3이다.

답 ①

1등급을 위한 고난도 문제

본책 79~82쪽

01 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해가 -2, 1이므로

$ax^2+bx+c=a(x+2)(x-1)$

$=ax^2+ax-2a$

$\therefore b=a,\ c=-2a$

따라서 $ax^2-bx+c<0$, 즉 $ax^2-ax-2a<0$에서

$a(x^2-x-2)<0,\quad (x+1)(x-2)<0$

$\therefore -1<x<2$

답 $-1<x<2$

주어진 이차함수의 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

02 $ax^2+2ax+3a>0$에서

$a(x^2+2x+3)>0$ …… ㉠

ㄱ. $a=0$이면 부등식 ㉠은

$0\cdot(x^2+2x+3)>0$

이므로 해는 없다.

ㄴ. $a>0$이면 부등식 ㉠은

$x^2+2x+3>0$, 즉 $(x+1)^2+2>0$

이므로 해는 모든 실수이다.

ㄷ. $a<0$이면 부등식 ㉠은

$x^2+2x+3<0$, 즉 $(x+1)^2+2<0$

이므로 해는 없다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

모든 실수 x에 대하여 $(x+1)^2+2>0$이므로 부등식 $(x+1)^2+2<0$을 만족시키는 해는 없다.

03 (i) $x<0$일 때,

$x^2-x-2\le 0,\quad (x+1)(x-2)\le 0$

$\therefore -1\le x\le 2$

그런데 $x<0$이므로 $\quad -1\le x<0$ ⋯ ❶

(ii) $x\ge 0$일 때,

$x^2+x-2\le 0,\quad (x+2)(x-1)\le 0$

$\therefore -2\le x\le 1$

그런데 $x\ge 0$이므로 $\quad 0\le x\le 1$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-1\le x\le 1$

이므로 정수 x는 -1, 0, 1의 3개이다. ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $x<0$일 때, x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ $x\ge 0$일 때, x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 x의 개수를 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $|x|^2=x^2$이므로 주어진 부등식은

$|x|^2+|x|-2\le 0$

$(|x|+2)(|x|-1)\le 0$

$\therefore -2\le |x|\le 1$

그런데 $|x|\ge 0$이므로

$0\le |x|\le 1\quad \therefore -1\le x\le 1$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1의 3개이다.

04 이차방정식 $x^2+ax+2a-4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4(2a-4)=0$

$a^2-8a+16=0,\quad (a-4)^2=0$

$\therefore a=4$

즉 이차부등식 $(x+4)^2<2(x+4^2)$에서

$x^2+8x+16<2x+32$

$x^2+6x-16<0,\quad (x+8)(x-2)<0$

$\therefore -8<x<2$

따라서 정수 x는 -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1의 9개이다.

답 ⑤

05 $x^2-4nx+3n^2\le 0$에서

$(x-n)(x-3n)\le 0$

이때 n이 자연수이므로

$n\le x\le 3n$

따라서 이 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는

$3n-n+1=2n+1$이므로

$f(n)=2n+1$

$f(1)+f(3)+f(5)=f(m)$에서

$3+7+11=2m+1$

$2m=20\quad \therefore m=10$

답 10

06 $x^2-(k^2+k+2)x+k^3+2k^2\le 0$에서

$x^2-(k^2+k+2)x+k^2(k+2)\le 0$

$(x-k^2)(x-k-2)\le 0$

(i) $k^2>k+2$일 때,

$k^2-k-2>0$

$(k+1)(k-2)>0$

$\therefore k>2\ (\because k>0)$

이때 주어진 부등식의 해는

$k+2\le x\le k^2$

이고 부등식을 만족시키는 x의 최댓값이 3이므로

$k^2=3\quad \therefore k=\pm\sqrt{3}$

그런데 $k>2$이므로 이것을 만족시키는 k는 존재하지 않는다.

(ii) $k^2=k+2$일 때,

$k^2-k-2=0$

$(k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=2\ (\because k>0)$

이때 주어진 부등식은

$(x-4)^2\le 0\quad \therefore x=4$

그런데 이것은 x의 최댓값이 3이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $k^2<k+2$일 때,

$k^2-k-2<0,\quad (k+1)(k-2)<0$

$\therefore 0<k<2\ (\because k>0)$

이때 주어진 부등식의 해는

$k^2 \le x \le k+2$

이 부등식을 만족시키는 x의 최댓값이 3이므로

$k+2=3 \qquad \therefore k=1$

이상에서 구하는 k의 값은 1이다. 답 ①

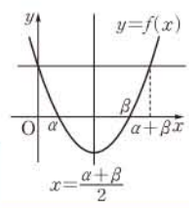
07 $f(x)=ax^2+bx+c$에서

$f(\alpha+\beta)=a(\alpha+\beta)^2+b(\alpha+\beta)+c$

이므로 주어진 부등식은

$f(x)<f(\alpha+\beta)$ …… ㉠

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$이므로



$f(\alpha+\beta)=f(0)$

따라서 ㉠에서 $f(x)<f(0)$이므로 주어진 부등식의 해는

$0<x<\alpha+\beta$ 답 ⑤

$y=f(x)$의 그래프는 축의 방정식 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$에 대하여 대칭이다.

08 액자틀의 넓이가 $140\,\text{cm}^2$ 이하가 되려면

$(8+2x)(5+2x)-5\cdot 8 \le 140$ ··· ❶

$4x^2+26x \le 140, \qquad 2x^2+13x-70 \le 0$

$(x+10)(2x-7) \le 0$

$\therefore -10 \le x \le \frac{7}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $\qquad 0<x\le\frac{7}{2}$ ··· ❷

따라서 자연수 x의 최댓값은 3이다. ··· ❸

답 3

x는 길이이므로 $x>0$

채점 기준	비율
❶ x에 대한 이차부등식을 세울 수 있다.	30 %
❷ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 자연수 x의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

09 이차부등식 $(a+b)x^2+(b+c)x+(c+a)>0$의 해가 $-3<x<0$이므로 $\qquad a+b<0$

해가 $-3<x<0$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$x(x+3)<0 \qquad \therefore x^2+3x<0$

양변에 $a+b$를 곱하면

$(a+b)x^2+3(a+b)x>0$

이 부등식이 $(a+b)x^2+(b+c)x+(c+a)>0$과 같으므로

$b+c=3(a+b),\ c+a=0$ …… ㉠

$\therefore b=-2a,\ c=-a$

이차부등식 $ax^2+bx+3c<0$, 즉 $ax^2-2ax-3a<0$에서 $a>0$이므로

$x^2-2x-3<0, \qquad (x+1)(x-3)<0$

$\therefore -1<x<3$ 답 ③

$c=-a$를 $b+c=3(a+b)$에 대입하면

$b-a=3a+3b$

$\therefore b=-2a$

$a+b<0$이고 $b=-2a$이므로

$a-2a<0$

$\therefore a>0$

다른 풀이 ㉠에서

$a+b=k\ (k<0)$ …… ㉡

로 놓으면

$b+c=3k$ …… ㉢

$c+a=0$ …… ㉣

㉡+㉢+㉣을 하면 $\qquad 2(a+b+c)=4k$

$\therefore a+b+c=2k$ …… ㉤

㉤−㉡을 하면 $\qquad c=k$

㉤−㉢을 하면 $\qquad a=-k$

㉤−㉣을 하면 $\qquad b=2k$

이차부등식 $ax^2+bx+3c<0$, 즉 $-kx^2+2kx+3k<0$에서 $-k>0$이므로

$x^2-2x-3<0, \qquad (x+1)(x-3)<0$

$\therefore -1<x<3$

10 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해가 $\frac{1}{10}<x<\frac{1}{5}$이므로 $\qquad a>0$ ··· ❶

해가 $\frac{1}{10}<x<\frac{1}{5}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x-\frac{1}{10}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)<0 \qquad \therefore x^2-\frac{3}{10}x+\frac{1}{50}<0$

양변에 a를 곱하면

$ax^2-\frac{3}{10}ax+\frac{1}{50}a<0$

이 부등식이 $ax^2+bx+c<0$과 같으므로

$b=-\frac{3}{10}a,\ c=\frac{1}{50}a$ ··· ❷

이차부등식 $cx^2+bx+a\le 0$, 즉

$\frac{1}{50}ax^2-\frac{3}{10}ax+a\le 0$에서 $a>0$이므로

$x^2-15x+50\le 0, \qquad (x-5)(x-10)\le 0$

$\therefore 5\le x\le 10$ ··· ❸

따라서 정수 x는 5, 6, 7, 8, 9, 10이므로 구하는 합은 45이다. ··· ❹

답 45

채점 기준	비율
❶ a의 부호를 구할 수 있다.	20 %
❷ b, c를 a로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 이차부등식 $cx^2+bx+a\le 0$의 해를 구할 수 있다.	30 %
❹ 모든 정수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

11 해가 $x=1$뿐이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)^2\le 0$ …… ㉠

주어진 부등식과 부등식 ㉠의 부등호의 방향이 다르므로 $\qquad a<0$

㉠의 양변에 a를 곱하면

$a(x-1)^2\ge 0, \qquad ax^2-2ax+a\ge 0$

이 부등식이 $ax^2+bx+c\ge 0$과 같으므로

$b=-2a,\ c=a$

ㄱ. $ax^2+bx+c\le 0$, 즉 $a(x-1)^2\le 0$의 해는 모든 실수이다.

ㄴ. $-ax^2+bx-c\le 0$, 즉 $-ax^2-2ax-a\le 0$에서

$-a(x+1)^2\le 0$

따라서 부등식의 해는 $x=-1$뿐이다.

ㄷ. $cx^2+2bx+4a\ge 0$, 즉 $ax^2-4ax+4a\ge 0$에서

$a(x-2)^2\ge 0$

따라서 부등식의 해는 $x=2$뿐이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

일품 BOX

$a<0$이므로 양변을 a로 나누면
$(x-1)^2\ge 0$
따라서 해는 모든 실수이다.

$-a>0$이므로 양변을 $-a$로 나누면
$(x+1)^2\le 0$
$\therefore x=-1$

$a<0$이므로 양변을 a로 나누면
$(x-2)^2\le 0$
$\therefore x=2$

12 해가 $\alpha\le x\le\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-\alpha)(x-\beta)\le 0$

$\therefore x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\le 0$

이 부등식이 $x^2+ax+6\le 0$과 같으므로

$a=-(\alpha+\beta),\ 6=\alpha\beta$ …… ㉠

해가 $x\le\alpha+1$ 또는 $x\ge\beta+1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-\alpha-1)(x-\beta-1)\ge 0$

$\therefore x^2-(\alpha+\beta+2)x+(\alpha+1)(\beta+1)\ge 0$

이 부등식이 $x^2-7x+b\ge 0$과 같으므로

$7=\alpha+\beta+2,\ b=(\alpha+1)(\beta+1)$ …… ㉡

㉡에서 $\alpha+\beta=5$이므로 ㉠에서

$a=-(\alpha+\beta)=-5$

㉠에서 $\alpha\beta=6$이므로 ㉡에서

$b=(\alpha+1)(\beta+1)$

$=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1$

$=6+5+1=12$

$\therefore a+b=7$ 답 7

13 주어진 그래프에서 이차부등식 $f(x)\le 0$의 해는

$-1\le x\le 2$

이차부등식 $f(x)\le 0$의 해
➡ 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x축보다 아래쪽에 있거나 x축과 만나는 부분의 x의 값의 범위

이때 $f\left(\frac{x+k}{2}\right)\le 0$에서 $\frac{x+k}{2}=t$로 놓으면 $f(t)\le 0$이고, 부등식 $f(t)\le 0$의 해는 $-1\le t\le 2$이므로

$-1\le\frac{x+k}{2}\le 2,\quad -2\le x+k\le 4$

$\therefore -2-k\le x\le 4-k$

따라서 $-2-k=-4,\ 4-k=2$이므로

$k=2$ 답 ③

14 이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $-2<x<1$이므로 $f(x)=a(x+2)(x-1)\ (a<0)$로 놓으면

$f(2x-1)=a(2x+1)(2x-2)$

$=2a(2x+1)(x-1)$

이때 $f(0)=-2a$이므로 $f(2x-1)\le f(0)$에서

$2a(2x+1)(x-1)\le -2a$

$2a\{(2x+1)(x-1)+1\}\le 0$

$2a(2x^2-x)\le 0,\quad x(2x-1)\ge 0\ (\because a<0)$

$\therefore x\le 0$ 또는 $x\ge\frac{1}{2}$

따라서 자연수 x의 최솟값은 1이다. 답 1

15 이차부등식 $x^2+(a-1)x-a+4\le 0$의 해가 존재하지 않으므로 이차방정식 $x^2+(a-1)x-a+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-1)^2-4(-a+4)<0$

$a^2+2a-15<0,\quad (a+5)(a-3)<0$

$\therefore -5<a<3$ ··· ❶

$(x+2)a-3x<6$에서

$(a-3)x<-2(a-3)$

이때 $a-3<0$이므로 $x>-2$ ··· ❷

$-5<a<3$에서
$-8<a-3<0$

따라서 정수 x의 최솟값은 -1이다. ··· ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❷ 부등식 $(x+2)a-3x<6$의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 x의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

16 $a(x^2-2x+2)>-2x$에서

$ax^2-2(a-1)x+2a>0$

이 부등식의 해가 존재하지 않으려면

$a<0$ …… ㉠

이차방정식 $ax^2-2(a-1)x+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a-1)\}^2-2a^2\le 0$

$-a^2-2a+1\le 0,\quad a^2+2a-1\ge 0$

$\therefore a\le -1-\sqrt{2}$ 또는 $a\ge -1+\sqrt{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$a\le -1-\sqrt{2}$ 답 ①

17 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$x^2+mx+am+b>0$

이 성립하므로 이차방정식 $x^2+mx+am+b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=m^2-4(am+b)<0$

$\therefore m^2-4am-4b<0$

해가 $-2<m<4$이고 m^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(m+2)(m-4)<0,\quad m^2-2m-8<0$

이 부등식이 $m^2-4am-4b<0$과 같으므로

$4a=2,\ 4b=8\quad \therefore a=\frac{1}{2},\ b=2$

$\therefore ab=\frac{1}{2}\cdot 2=1$ 답 ②

18 $|x|=t\ (t\geq 0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2-2at+2a^2+a\geq 0$

$x^2=|x|^2=t^2$

$f(t)=t^2-2at+2a^2+a=(t-a)^2+a^2+a$라 하면

$t\geq 0$에서 $f(t)\geq 0$이어야 한다. ⋯ ❶

(i) $a<0$일 때, $f(0)\geq 0$이어야 하므로

$2a^2+a\geq 0,\quad a(2a+1)\geq 0$

$\therefore a\leq -\frac{1}{2}$ 또는 $a\geq 0$

그런데 $a<0$이므로 $\quad a\leq -\frac{1}{2}$

(ii) $a\geq 0$일 때, $f(a)\geq 0$이어야 하므로

$a^2+a\geq 0,\quad a(a+1)\geq 0$

$\therefore a\leq -1$ 또는 $a\geq 0$

그런데 $a\geq 0$이므로 $\quad a\geq 0$

(i), (ii)에서 a의 값의 범위는

$a\leq -\frac{1}{2}$ 또는 $a\geq 0$ ⋯ ❷

따라서 $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=0$이므로

$\beta-\alpha=\frac{1}{2}$ ⋯ ❸

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\|x\|=t$로 놓고 주어진 부등식이 성립할 t에 대한 조건을 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ $\beta-\alpha$의 값을 구할 수 있다.	20 %

19 $a<b<c$이므로 부등식 $(x-a)(x-b)>0$의 해는 $\quad x<a$ 또는 $x>b$ ⋯⋯ ㉠

부등식 $(x-b)(x-c)>0$의 해는

$x<b$ 또는 $x>c$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x<a$ 또는 $x>c$

$\therefore a=-1,\ c=6$ ⋯ ❶

따라서 $x^2+ax-c<0$, 즉 $x^2-x-6<0$에서

$(x+2)(x-3)<0 \qquad \therefore -2<x<3$ ⋯ ❷

답 $-2<x<3$

채점 기준	비율
❶ a, c의 값을 구할 수 있다.	70 %
❷ 이차부등식 $x^2+ax-c<0$의 해를 구할 수 있다.	30 %

20 $x^2-5x-6>0$에서

$(x+1)(x-6)>0 \qquad \therefore x<-1$ 또는 $x>6$

$x^2+a^2<(a^2-a+1)x+a$에서

$x^2-(a^2-a+1)x+(a^2-a)<0$

$(x-1)(x-a^2+a)<0$

$\therefore \begin{cases} a^2-a>1\text{일 때,} & 1<x<a^2-a \\ a^2-a=1\text{일 때,} & \text{해가 없다.} \\ a^2-a<1\text{일 때,} & a^2-a<x<1 \end{cases}$

이때 주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면

$-1\leq a^2-a\leq 6$

$-1\leq a^2-a$에서 $\quad a^2-a+1\geq 0$

$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq 0$

$\therefore a$는 모든 실수 ⋯⋯ ㉠

$a^2-a\leq 6$에서 $\quad a^2-a-6\leq 0$

$(a+2)(a-3)\leq 0$

$\therefore -2\leq a\leq 3$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad -2\leq a\leq 3$

따라서 정수 a는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 6개이다.

답 6

21 $|x-1|(x-2)\geq 0$에서 $|x-1|\geq 0$이므로

$x=1$ 또는 $x\geq 2$ ⋯⋯ ㉠

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 5개이므로

부등식 $(2x-1)(x-a)\leq 0$의 해는

$\frac{1}{2}\leq x\leq a$ ⋯⋯ ㉡

이어야 하고 오른쪽 그림에서

$5\leq a<6$

답 ④

22 $f(x)g(x)\leq 0$에서

$f(x)\leq 0,\ g(x)\geq 0$ 또는 $f(x)\geq 0,\ g(x)\leq 0$

이때 $f(x)\leq g(x)$이므로 $\quad f(x)\leq 0,\ g(x)\geq 0$

$f(x)\leq 0$에서 $\quad -1\leq x\leq 2$ ⋯⋯ ㉠

$g(x)\geq 0$에서 $\quad -2\leq x\leq 1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad -1\leq x\leq 1$

따라서 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1$의 3개이다. 답 ③

23 두 이차방정식

$x^2+(a-2)x+2-a=0,$ ⋯⋯ ㉠

$x^2+(a+2)x+2a+1=0$ ⋯⋯ ㉡

의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$D_1=(a-2)^2-4(2-a)=a^2-4$

$=(a+2)(a-2)$

$D_2=(a+2)^2-4(2a+1)=a^2-4a$

$=a(a-4)$

(i) ㉠은 실근, ㉡은 허근을 가질 때,

$D_1=(a+2)(a-2)\geq 0$에서

$a\leq -2$ 또는 $a\geq 2$ ⋯⋯ ㉢

$D_2=a(a-4)<0$에서

$0<a<4$ ⋯⋯ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $\quad 2\leq a<4$

(ii) ㉠은 허근, ㉡은 실근을 가질 때,

$D_1=(a+2)(a-2)<0$에서

$-2<a<2$ …… ㉤

$D_2=a(a-4)\geq 0$에서

$a\leq 0$ 또는 $a\geq 4$ …… ㉥

㉤, ㉥의 공통부분을 구하면 $-2<a\leq 0$

(i), (ii)에서

$-2<a\leq 0$ 또는 $2\leq a<4$

따라서 정수 a는 -1, 0, 2, 3이므로 구하는 합은 4이다.

답 4

24 (i) $x+2a\leq x^2$, 즉 $x^2-x-2a\geq 0$에서

$x^2-x-2a=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2a$ …… ㉠

$0\leq x\leq 1$에서 ㉠은 $x=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{1}{4}-2a$를 갖고, 주어진 부등식이 항상 성립하므로

$-\frac{1}{4}-2a\geq 0$ $\therefore a\leq -\frac{1}{8}$ ··· ❶

$p\leq x\leq q$에서 부등식 $f(x)\geq 0$이 항상 성립하려면 $p\leq x\leq q$에서 ($f(x)$의 최솟값)≥ 0이어야 한다.

(ii) $x^2\leq 2x+3b$, 즉 $x^2-2x-3b\leq 0$에서

$x^2-2x-3b=(x-1)^2-1-3b$ …… ㉡

$0\leq x\leq 1$에서 ㉡은 $x=0$일 때 최댓값 $-3b$를 갖고, 주어진 부등식이 항상 성립하므로

$-3b\leq 0$ $\therefore b\geq 0$ ··· ❷

$p\leq x\leq q$에서 부등식 $f(x)\leq 0$이 항상 성립하려면 $p\leq x\leq q$에서 ($f(x)$의 최댓값)≤ 0이어야 한다.

(i), (ii)에서 $a\leq -\frac{1}{8}$, $b\geq 0$이므로

$b-8a\geq 1$

$a\leq -\frac{1}{8}$에서 $-8a\geq 1$이고 $b\geq 0$이므로 $b-8a\geq 1$

따라서 $b-8a$의 최솟값은 1이다. ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ $b-8a$의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

25 A음료 한 잔의 가격을 $200x$원 인상하면 하루 판매량이 $4x$잔 줄어드므로 하루 판매액은

$(2000+200x)(100-4x)$ (원)

이고 하루 판매액이 24만 원 이상이려면

$(2000+200x)(100-4x)\geq 240000$

$x^2-15x+50\leq 0$, $(x-5)(x-10)\leq 0$

$\therefore 5\leq x\leq 10$ …… ㉠

A음료 한 잔의 가격을 $100x$원 인하하면 하루 판매량이 $10x$잔 늘어나므로 하루 판매액은

$(2000-100x)(100+10x)$ (원)

이고 하루 판매액이 22만 원 이상이려면

$(2000-100x)(100+10x)\geq 220000$

$x^2-10x+20\leq 0$

$\therefore 5-\sqrt{5}\leq x\leq 5+\sqrt{5}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$5\leq x\leq 5+\sqrt{5}$

$5+\sqrt{5}=7.\times\times\times$

따라서 자연수 x는 5, 6, 7이므로 구하는 합은 18이다.

답 18

26 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a-1)\}^2-4(a-3)$

$=a^2-6a+13=(a-3)^2+4>0$

이므로 모든 실수 a에 대하여 주어진 이차방정식은 실근을 갖는다.

ㄱ. $\alpha=-\beta$이면

$\alpha+\beta=a-1$에서 $0=a-1$ $\therefore a=1$

ㄴ. α와 β의 부호가 서로 다르면

$\alpha\beta=a-3<0$ $\therefore a<3$

ㄷ. (i) $\alpha>0$, $\beta>0$일 때,

$\alpha+\beta=a-1>0$

$\therefore a>1$ …… ㉠

$\alpha\beta=a-3>0$

$\therefore a>3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $a>3$

(ii) $\alpha<0$, $\beta<0$일 때,

$\alpha+\beta=a-1<0$

$\therefore a<1$ …… ㉢

$\alpha\beta=a-3>0$

$\therefore a>3$ …… ㉣

㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 a의 값은 없다.

(i), (ii)에서 $a>3$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

27 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면 이 이차방정식이 실근을 가지므로

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k+3)\geq 0$

$k^2+k-2\geq 0$, $(k+2)(k-1)\geq 0$

$\therefore k\leq -2$ 또는 $k\geq 1$ …… ㉠

ㄱ. $\alpha>0$, $\beta>0$이면 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$이므로

$\alpha+\beta=2(k+1)>0$에서 $k>-1$ …… ㉡

$\alpha\beta=k+3>0$에서 $k>-3$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $k\geq 1$

ㄴ. $\alpha>0$, $\beta<0$이면 $\alpha\beta<0$이므로

$\alpha\beta=k+3<0$에서 $k<-3$ …… ㉣

㉠, ㉣의 공통부분을 구하면 $k<-3$

ㄷ. $\alpha<-\beta$, $\beta>0$이면 $\alpha<0$이므로

$\beta>0$에서 $-\beta<0$이므로 $\alpha<-\beta<0$

$\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta<0$

$\alpha+\beta=2(k+1)<0$에서 $k<-1$ …… ㉤

$\alpha\beta=k+3<0$에서 $k<-3$ …… ㉥

㉠, ㉤, ㉥의 공통부분을 구하면 $k<-3$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

28 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 판별식을 D_1이라 하면 이 이차방정식이 중근을 가지므로

$$D_1=(-a)^2-4b=0 \qquad \therefore b=\frac{1}{4}a^2$$

이차방정식 $x^2-(a+3)x+a+6=0$의 두 근을 α, β라 하고, 판별식을 D_2라 하면 이 이차방정식이 두 양의 실근을 가지므로

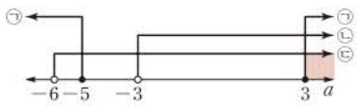
(i) $D_2=\{-(a+3)\}^2-4(a+6)\geq 0$에서

$a^2+2a-15\geq 0, \qquad (a+5)(a-3)\geq 0$

$\therefore a\leq -5$ 또는 $a\geq 3$ …… ㉠

(ii) $\alpha+\beta=a+3>0$에서 $\quad a>-3$ …… ㉡

(iii) $\alpha\beta=a+6>0$에서 $\quad a>-6$ …… ㉢



이상에서 공통부분을 구하면 $\quad a\geq 3$

$$a-b=a-\frac{1}{4}a^2=-\frac{1}{4}(a-2)^2+1$$

이므로 $a\geq 3$에서 $a-b$는 $a=3$일 때 최댓값 $\frac{3}{4}$을 갖는다.

답 ③

$-\frac{1}{4}\cdot(3-2)^2+1=\frac{3}{4}$

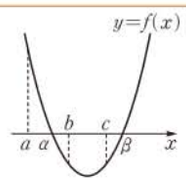
29 $f(x)=2(x-b)(x-c)-(x-a)^2$이라 하면

$f(a)=2(a-b)(a-c)>0$

$f(b)=-(b-a)^2<0$

$f(c)=-(c-a)^2<0$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore a<\alpha<b<c<\beta$

답 ④

$a<b<c$이므로
$a-b<0,\ a-c<0$
$\therefore (a-b)(a-c)>0$

30 $f(x)=x^2+4mx+m^2+3$이라 하고, 방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

(i) $\frac{D}{4}=(2m)^2-(m^2+3)\geq 0$에서

$m^2-1\geq 0, \qquad (m+1)(m-1)\geq 0$

$\therefore m\leq -1$ 또는 $m\geq 1$

(ii) $f(-2)=4-8m+m^2+3\leq 0$에서

$m^2-8m+7\leq 0, \qquad (m-1)(m-7)\leq 0$

$\therefore 1\leq m\leq 7$

(iii) $f(0)=m^2+3>0$이므로 m은 모든 실수이다.

이상에서 $\quad 1\leq m\leq 7$

따라서 정수 m은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7개이다.

답 ⑤

31 이차방정식 $(a+1)x^2+4x-a+1=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=2^2-(a+1)(-a+1)=a^2+3>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다. ⋯ ❶

$f(x)=(a+1)x^2+4x-a+1$이라 하자.

(i) $f(0)=0$일 때,

$f(0)=-a+1=0$이므로 $\quad a=1$

주어진 이차방정식은 $2x^2+4x=0$이므로

$x(x+2)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=0$

따라서 $0\leq x\leq 2$에서 오직 한 개의 실근을 갖는다.

(ii) $f(2)=0$일 때,

$f(2)=3a+13=0$이므로 $\quad a=-\frac{13}{3}$

주어진 이차방정식은 $-\frac{10}{3}x^2+4x+\frac{16}{3}=0$이므로

$5x^2-6x-8=0$

$(5x+4)(x-2)=0 \qquad \therefore x=-\frac{4}{5}$ 또는 $x=2$

따라서 $0\leq x\leq 2$에서 오직 한 개의 실근을 갖는다. ⋯ ❷

(iii) $f(0)f(2)<0$일 때,

$(-a+1)(3a+13)<0$

$(a-1)(3a+13)>0$

$\therefore a<-\frac{13}{3}$ 또는 $a>1$ ⋯ ❸

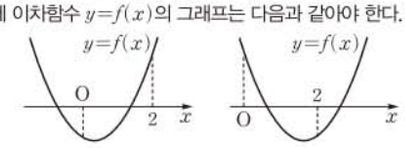
이상에서 $\quad a\leq -\frac{13}{3}$ 또는 $a\geq 1$ ⋯ ❹

답 $a\leq -\frac{13}{3}$ 또는 $a\geq 1$

채점 기준	비율
❶ 주어진 이차방정식의 실근의 개수를 구할 수 있다.	20 %
❷ $f(0)=0$ 또는 $f(2)=0$일 때의 a의 값이 조건을 만족시키는지 알 수 있다.	30 %
❸ $f(0)f(2)<0$일 때 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

1등급 비밀노트

$f(0)\neq 0$, $f(2)\neq 0$일 때, 주어진 조건을 만족시키려면 $a+1>0$인 경우에 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



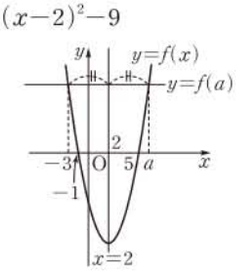
따라서 (iii)에서 두 수의 함숫값의 부호가 서로 다름을 이용하여 푼다.

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 83쪽

01 $f(x)=(x+1)(x-5)=(x-2)^2-9$

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이고 부등식 $f(x)<f(a)$의 해가 $-3<x<a$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(a)$가 만나는 두 점의 x좌표는 -3, a이다.



즉 $2-(-3)=a-2$에서 $\quad a=7$

직선 $x=2$로부터 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(a)$의 두 교점까지의 거리가 같다.

부등식 $f(x)<a$에서 $(x+1)(x-5)<7$

$x^2-4x-12<0$, $(x+2)(x-6)<0$

$\therefore -2<x<6$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은 14이다. 답 14

02 세 지점 A, B, C를 B를 원점으로 하는 수직선 위에 놓고 1 km를 1로 생각하면

A(-10), B(0), C(20)

보관 창고의 좌표를 t라 하면 보관 창고는 B와 C 사이에 있으므로 $0<t<20$ …… ㉠

이때 하루에 드는 총 운송비는

$200(t+10)^2+100t^2+300(20-t)^2$ (원)

이므로 하루에 드는 총 운송비가 155000원 이하이려면

$200(t+10)^2+100t^2+300(20-t)^2\le 155000$

$3t^2-40t-75\le 0$, $(3t+5)(t-15)\le 0$

$\therefore -\frac{5}{3}\le t\le 15$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $0<t\le 15$

따라서 보관 창고는 B지점에서 최대 15 km 떨어진 지점까지 지을 수 있다. 답 ④

03 빗변이 아닌 두 변의 길이를 a, b $(a<b)$라 하면 조건 (가)에 의하여

$a+b=11$ …… ㉠

조건 (나)에 의하여 $\frac{1}{2}ab>14$

$\therefore ab>28$ …… ㉡

㉠에서 $b=11-a$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$a(11-a)>28$, $a^2-11a+28<0$

$(a-4)(a-7)<0$ $\therefore 4<a<7$

그런데 조건 (다)에서 a는 자연수이므로 $a=5$

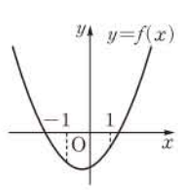
$a=5$를 ㉠에 대입하면 $b=6$

따라서 직각삼각형의 빗변의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5^2+6^2}=\sqrt{61}$ 답 ①

$a=6$이면 $b=5$이므로
$a>b$
$\therefore a\neq 6$

04 $f(x)=x^2+(t-2)x+2t$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $f(1)=1+t-2+2t\le 0$에서

$3t-1\le 0$ $\therefore t\le\frac{1}{3}$

(ii) $f(-1)=1-t+2+2t\le 0$에서

$t+3\le 0$ $\therefore t\le -3$

(i), (ii)에서 $t\le -3$이므로 실수 t의 최댓값은 -3이다. 답 ①

05 부등식 $x^2+2ax-3a^2\le 0$에서

$(x+3a)(x-a)\le 0$

$\therefore -3a\le x\le a$ …… ㉠

부등식 $x^2-2ax-3a^2<0$에서

$(x+a)(x-3a)<0$

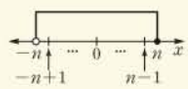
$\therefore -a<x<3a$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-a<x\le a$ …… ㉢

(i) $a=n$ (n은 자연수)일 때,

㉢을 만족시키는 정수 x는

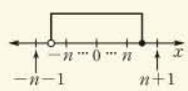


$-n+1$, $-n+2$, …, -2, -1, 0, 1, 2, …, $n-1$, n

$\therefore f(a)=2n=2a$, $S(a)=n=a$

(ii) $n<a<n+1$ (n은 음이 아닌 정수)일 때,

㉢을 만족시키는 정수 x는



$-n$, $-n+1$, $-n+2$, …, -2, -1, 0, 1, 2, …, $n-1$, n

$\therefore f(a)=2n+1$, $S(a)=0$

$f(a)=24$이면 $24=2\cdot 12$이므로 (i)에 의하여

$a=12$

$p=12$

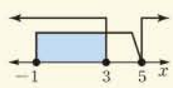
$f(a)=37$이면 $37=2\cdot 18+1$이므로 (ii)에 의하여

$18<a<19$

$q=0$

$\therefore p+q=12$ 답 12

06 주어진 연립부등식의 해가 $-1\le x\le 3$ 또는 $x=5$이려면



$x^2+ax+b=(x-3)(x-5)\ge 0$,

$x^2+cx+d=(x+1)(x-5)\le 0$

이어야 한다.

$x^2+ax+b=x^2-8x+15$에서 $a=-8$, $b=15$

$x^2+cx+d=x^2-4x-5$에서 $c=-4$, $d=-5$

$\therefore ad-bc=40-(-60)=100$ 답 100

07 $x^2-x-n-n^2\ge 0$에서

$(x+n)(x-n-1)\ge 0$

$\therefore x\le -n$ 또는 $x\ge n+1$ …… ㉠

n은 자연수이므로
$-n<n+1$

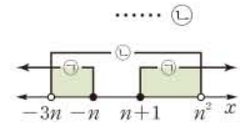
$x^2+n(3-n)x-3n^3<0$에서

$(x+3n)(x-n^2)<0$

$\therefore -3n<x<n^2$ …… ㉡

n은 자연수이므로
$-3n<n^2$

오른쪽 그림에서 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$-3n<x\le -n$

또는 $n+1\le x<n^2$

$n\neq 1$이므로 $n\ge 2$에서
$n+1<n^2$

즉 정수 x의 개수는

$\{-n-(-3n)\}+\{n^2-(n+1)\}=n^2+n-1$

따라서 $n^2+n-1>55$에서

$n^2+n-56>0$, $(n+8)(n-7)>0$

$\therefore n>7$ ($\because n\ge 2$)

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 8이다. 답 8

만점 도전을 위한 실전 마무리 문제

본책 84~87쪽

01 전략 부등식의 성질과 두 수의 차를 이용하여 두 수의 대소 관계를 조사한다.

풀이 ㄱ. $|a|>1$이면 $0<\frac{1}{|a|}<1$이다.

ㄴ. $ab>0$이므로 $b<a<0$에서

$\frac{b}{ab}<\frac{a}{ab}<0 \qquad \therefore \frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$

ㄷ. $\frac{a+1}{b+1}-\frac{a}{b}=\frac{b(a+1)-a(b+1)}{b(b+1)}=\frac{b-a}{b(b+1)}<0$

$\therefore \frac{a+1}{b+1}<\frac{a}{b}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

02 전략 두 수의 차의 부호를 구하여 세 수 사이의 대소 관계를 조사한다.

풀이 $A-B$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

$\quad -(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

>0

$\therefore A>B$ …… ㉠

$C-A$

$=3(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

$=2(a^3+b^3+c^3)-(a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c)$

$=(a^3+b^3-a^2b-b^2a)+(b^3+c^3-b^2c-c^2b)$

$\quad +(c^3+a^3-c^2a-a^2c)$

$=\{a^2(a-b)-b^2(a-b)\}+\{b^2(b-c)-c^2(b-c)\}$

$\quad +\{c^2(c-a)-a^2(c-a)\}$

$=(a-b)^2(a+b)+(b-c)^2(b+c)+(c-a)^2(c+a)$

>0

$\therefore C>A$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $B<A<C$ 답 ③

03 전략 먼저 부등식의 해가 주어진 해와 일치하기 위한 a, b의 조건을 찾는다.

풀이 $ax+x-b>0$에서 $(a+1)x>b$

이 부등식의 해가 $x<1$이므로

$a+1<0 \qquad \therefore x<\frac{b}{a+1}$

따라서 $\frac{b}{a+1}=1$이므로 $b=a+1$ …… ㉠

$ax-bx-b<0$에서 $(a-b)x<b$

$\{a-(a+1)\}x<a+1, \qquad -x<a+1$

$\therefore x>-a-1$

이때 a가 정수이므로 이 부등식을 만족시키는 정수 x의 최솟값은 $-a$

일품 BOX

$|a|>1$의 양변을 $|a|$로 나누면 $\frac{1}{|a|}<1$

$0<b<a$에서 $b-a<0$

서로 다른 세 양수 a, b, c에 대하여 $a+b+c>0$, $(a-b)^2>0$, $(b-c)^2>0$, $(c-a)^2>0$

$-a=4$에서 $a=-4$

㉠에 $a=-4$를 대입하면 $b=-3$

$\therefore a+b=-7$ 답 ④

04 전략 두 연립부등식의 해를 각각 구하여 해가 같아지도록 하는 a, b의 값을 구한다.

풀이 $2x-5<x+1$에서 $x<6$

$10-x<x+a$에서

$-2x<a-10 \qquad \therefore x>\frac{10-a}{2}$

이때 연립부등식 $\begin{cases}2x-5<x+1\\10-x<x+a\end{cases}$의 해가 존재하므로

그 해는 $\frac{10-a}{2}<x<6$ …… ㉠

$3x+b<2-x$에서

$4x<2-b \qquad \therefore x<\frac{2-b}{4}$

$x+3<2x+1$에서 $x>2$

이때 연립부등식 $\begin{cases}3x+b<2-x\\x+3<2x+1\end{cases}$의 해가 존재하므로

그 해는 $2<x<\frac{2-b}{4}$ …… ㉡

두 연립부등식의 해가 서로 같으므로 ㉠, ㉡에서

$\frac{10-a}{2}=2, \ 6=\frac{2-b}{4}$

따라서 $a=6$, $b=-22$이므로

$a+b=-16$ 답 ①

05 전략 선분의 길이를 x에 대한 식으로 나타낸 후 주어진 조건을 이용하여 부등식을 세운다.

풀이 가로에 있는 선분의 길이의 합은

$2x\cdot3=6x$

$\overline{EB}=8-x$이므로 세로에 있는 선분의 길이의 합은

$8\cdot3+(8-x)=32-x$

$6x+(32-x)\le62$이므로

$5x+32\le62 \qquad \therefore x\le6$ …… ㉠

$\overline{BI}=\overline{JC}=\overline{EB}=8-x$이므로

$\overline{IJ}=2x-2(8-x)=4x-16$

직사각형 GIJH의 둘레의 길이는

$2\{(4x-16)+(8-x)\}=6x-16$

이므로 $6x-16>3x$에서 $x>\frac{16}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{16}{3}<x\le6$ 답 ④

$\overline{AD}+\overline{EF}+\overline{BC}$

$\overline{AE}+\overline{EB}=8$
$\overline{DF}+\overline{FC}=8$
$\overline{MN}+\overline{GI}=8$
$\overline{HJ}=8-x$

06 전략 $A<B<C$ 꼴의 부등식은 연립부등식 $\begin{cases}A<B\\B<C\end{cases}$로 바꾸어 푼다.

풀이 $2x+b<a(x-1)+b$에서

$(2-a)x<-a$ …… ㉠

$a(x-1)+b<ax+4$에서

$ax-a+b<ax+4$

$\therefore 0\cdot x<a-b+4$ …… ㉡

주어진 부등식의 해가 존재하므로

$a-b+4>0$ …… ㉢

이고 부등식 ㉡의 해는 모든 실수이다.

주어진 부등식의 해가 $x>3$이므로 ㉠에서

$2-a<0 \qquad \therefore x>-\dfrac{a}{2-a}$

즉 $-\dfrac{a}{2-a}=3$이므로 $\qquad -a=6-3a \qquad \therefore a=3$

㉢에 $a=3$을 대입하면 $\qquad 3-b+4>0 \qquad \therefore b<7$

따라서 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)$

의 6개이다. 답 ③

07 전략 $|x|<\alpha\ (\alpha>0)$이면 $-\alpha<x<\alpha$이다.

풀이 $a|x|-a^2<b|x|-b^2$에서

$(a-b)|x|<a^2-b^2$

$(a-b)|x|<(a+b)(a-b)$

$a>b>0$에서 $a-b>0$이므로 양변을 $a-b$로 나누면

$|x|<a+b$

$\therefore -a-b<x<a+b$ 답 ②

08 전략 $x<0$일 때와 $x\geq 0$일 때로 나누어 부등식의 해를 구한다.

풀이 (i) $x<0$일 때, $\langle x\rangle=-2x$이므로 주어진 부등식은

$4x^2+2x-2\leq 0, \qquad 2x^2+x-1\leq 0$

$(x+1)(2x-1)\leq 0 \qquad \therefore -1\leq x\leq \dfrac{1}{2}$

그런데 $x<0$이므로 $\qquad -1\leq x<0$

(ii) $x\geq 0$일 때, $\langle x\rangle=3x$이므로 주어진 부등식은

$9x^2-3x-2\leq 0, \qquad (3x+1)(3x-2)\leq 0$

$\therefore -\dfrac{1}{3}\leq x\leq \dfrac{2}{3}$

그런데 $x\geq 0$이므로 $\qquad 0\leq x\leq \dfrac{2}{3}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-1\leq x\leq \dfrac{2}{3}$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=\dfrac{2}{3}$이므로 $\qquad \alpha+\beta=-\dfrac{1}{3}$ 답 ③

1등급 비밀노트

$\langle x\rangle^2-\langle x\rangle-2\leq 0$에서

$(\langle x\rangle+1)(\langle x\rangle-2)\leq 0$

$\therefore -1\leq\langle x\rangle\leq 2$ …… ㉠

따라서 $x<0$일 때와 $x\geq 0$일 때로 나누어 부등식 ㉠의 해를 구해도 된다.

09 전략 주어진 부등식을 $f(x)>0$ 꼴로 변형한 후 $f(x)$를 인수분해한다.

풀이 부등식 ㉠에서

$(a^2-b^2)x^2-4(a^2-b^2)x+3(a^2-b^2)>0$

$(a^2-b^2)(x^2-4x+3)>0$ …… ㉡

ㄱ. $|a|<|b|$이면 $a^2<b^2$이므로 $\qquad a^2-b^2<0$

㉡에서 부등식 ㉠의 해는 $\qquad x^2-4x+3<0$

$(x-1)(x-3)<0 \qquad \therefore 1<x<3$

ㄴ. $a=b$이면 ㉡에서

$a=b$이면 $a^2-b^2=0$

$0\cdot(x^2-4x+3)>0$

이므로 부등식 ㉠의 해는 없다.

ㄷ. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$에서 $a+b<0$, $b>0$이면

$a-b=a+b-2b<0$

$a+b<0$, $-2b<0$이므로 $a+b-2b<0$

이므로 $\qquad (a+b)(a-b)>0$

㉡에서 부등식 ㉠의 해는 $\qquad x^2-4x+3>0$

$(x-1)(x-3)>0 \qquad \therefore x<1$ 또는 $x>3$

따라서 자연수 x의 최솟값은 4이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

10 전략 주어진 조건을 이용하여 t에 대한 이차부등식을 세운다.

풀이 물체의 높이 h m가 165 m 이상이므로

$70t-5t^2\geq 165, \qquad 5t^2-70t+165\leq 0$

$t^2-14t+33\leq 0, \qquad (t-3)(t-11)\leq 0$

$\therefore 3\leq t\leq 11$

따라서 이 물체의 높이가 165 m 이상인 시간은 3초부터 11초까지인 8초 동안이다. 답 ④

11 전략 부등식의 해를 이용하여 이차부등식을 완성하고 a, b, c 사이의 관계를 찾는다.

풀이 해가 $\alpha<x<\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

해가 $p<x<q$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-p)(x-q)<0$

$(x-\alpha)(x-\beta)<0 \qquad \therefore x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta<0$

양변에 2를 곱하면 $\qquad 2x^2-2(\alpha+\beta)x+2\alpha\beta<0$

이 부등식이 $2x^2-4x+1<0$과 같으므로

$\alpha+\beta=2, \ \alpha\beta=\dfrac{1}{2}$

부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해가 $\dfrac{1}{\beta}<x<\dfrac{1}{\alpha}$이므로

$a>0$

해가 $\dfrac{1}{\beta}<x<\dfrac{1}{\alpha}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x-\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(x-\dfrac{1}{\beta}\right)<0$

$\therefore x^2-\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)x+\dfrac{1}{\alpha\beta}<0$

양변에 a를 곱하면 $\qquad ax^2-a\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)x+\dfrac{a}{\alpha\beta}<0$

이 부등식이 $ax^2+bx+c<0$과 같으므로

$-a\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)=b, \ \dfrac{a}{\alpha\beta}=c$

이때 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=4$이므로 $\quad b=-4a$

$\frac{1}{\alpha\beta}=2$이므로 $\quad c=2a$

따라서 부등식 $(a+b)x^2+(b+c)x+4c>0$에서

$(a-4a)x^2+(-4a+2a)x+4\cdot 2a>0$

$-3ax^2-2ax+8a>0$

$a>0$이므로

$3x^2+2x-8<0, \quad (x+2)(3x-4)<0$

$\therefore -2<x<\frac{4}{3}$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1의 3개이다. 답 ③

다른 풀이 이차방정식 $2x^2-4x+1=0$의 해가 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2, \ \alpha\beta=\frac{1}{2}$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해가 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{b}{a}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=4 \quad \therefore b=-4a$

$\frac{c}{a}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=2 \quad \therefore c=2a$

12 전략 a의 값의 부호에 따라 부등식 $f(x)<0$이 해를 가질 조건을 구한다.

풀이 (i) $a<0$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하므로 부등식 $f(x)<0$은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a>0$일 때,

이차방정식 $ax^2-2x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-3a>0, \quad 3a<1$

$\therefore a<\frac{1}{3}$

그런데 $a>0$이므로 $\quad 0<a<\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 $a<0$ 또는 $0<a<\frac{1}{3}$이므로 정수 a의 최댓값은 -1이다. 답 ③

13 전략 먼저 주어진 부등식을 한 문자에 대한 내림차순으로 정리한다.

풀이 주어진 부등식의 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+2(2y+5)x+(4y^2+ay+b)>0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+2(2y+5)x+(4y^2+ay+b)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2y+5)^2-(4y^2+ay+b)<0$

$4y^2+20y+25-4y^2-ay-b<0$

$\therefore (20-a)y<b-25$

이 부등식이 모든 실수 y에 대하여 성립해야 하므로

$20-a=0, \ b-25>0 \quad \therefore a=20, \ b>25$

따라서 b는 정수이므로 $a+b$의 최솟값은

$20+26=46$ 답 ②

14 전략 두 부등식의 해를 각각 구하여 수직선 위에 나타낸 후 공통부분이 존재하지 않도록 하는 a, b의 조건을 구한다.

풀이 $x^2-2ax+a^2-4<0$에서

$x^2-2ax+(a+2)(a-2)<0$

$(x-a+2)(x-a-2)<0$

$\therefore a-2<x<a+2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

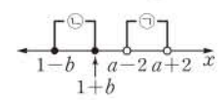
$x^2-2x+1-b^2\le 0$에서

$x^2-2x+(1+b)(1-b)\le 0$

$(x-1-b)(x-1+b)\le 0$

$\therefore 1-b\le x\le 1+b \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 존재하지 않아야 하므로 오른쪽 그림에서



$1+b\le a-2 \quad \therefore a-b\ge 3$

따라서 $a-b$의 최솟값은 3이다. 답 ③

15 전략 이차방정식의 두 근이 모두 음수일 조건을 이용하여 먼저 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하고, 두 근을 α, β $(\alpha<\beta<0)$라 하자.

ㄱ. (i) $\frac{D}{4}=\{-(a-1)\}^2-(3a+7)>0$에서

$a^2-5a-6>0, \quad (a+1)(a-6)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>6$

(ii) $\alpha+\beta=2(a-1)<0$에서 $\quad a<1$

(iii) $\alpha\beta=3a+7>0$에서 $\quad a>-\frac{7}{3}$

이상에서 공통부분을 구하면

$-\frac{7}{3}<a<-1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

ㄴ. $f(x)=x^2-2(a-1)x+3a+7$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=a-1$이고, ㉡에서

$-\frac{10}{3}<a-1<-2$이므로 $\quad -7<a-1$

또 $f(-7)=49+14(a-1)+3a+7=17a+42$이고, ㉡에서 $\frac{7}{3}<17a+42<25$이므로

$f(-7)>0$

따라서 이차방정식 ㉠의 두 근은 모두 -7보다 크다.

ㄷ. 이차방정식 $x^2+ax+3a=0$의 두 근을 p, q라 하면 $pq=3a<0$이므로 두 근의 부호는 서로 다르다.

$p+q=-a>0$이므로 양의 근이 음의 근의 절댓값보다 크다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

일품 BOX

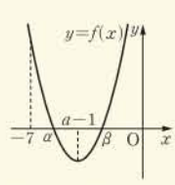
$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$

$\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

부등식 $mx<n$이 모든 실수 x에 대하여 성립할 조건은
$m=0, \ n>0$

b는 양수이므로
$1-b<1+b$

a, b는 양수이므로
$a+2\le 1-b$이면
$a+b\le -1$이 되어 모순이다.
$\therefore 1-b<a+2$



위의 그림에서
$-7<a-1$, $f(-7)>0$이면 두 근은 모두 -7보다 크다.

㉡에서 $-7<3a<-3$

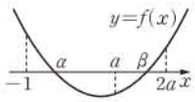
㉡에서 $1<-a<\frac{7}{3}$

16 전략 이차방정식 $f(x)=0$에 대하여 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려 $f(-1)$, $f(a)$, $f(2a)$의 부호를 찾는다.

풀이 $f(x)=x^2-ax+a-1$이라 하면

$-1<\alpha<a<\beta<2a$

이므로 오른쪽 그림에서



$f(-1)>0$, $f(a)<0$,

$f(2a)>0$

$f(-1)>0$에서 $f(-1)=1+a+a-1=2a>0$

$\therefore a>0$ …… ㉠

$f(a)<0$에서 $f(a)=a^2-a^2+a-1<0$

$\therefore a<1$ …… ㉡

$f(2a)>0$에서

$f(2a)=4a^2-2a^2+a-1=2a^2+a-1>0$

$(a+1)(2a-1)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>\frac{1}{2}$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$\frac{1}{2}<a<1$

답 ②

17 전략 부등식 $|x+a|<b$를 풀어 먼저 a, b의 값을 구한다.

풀이 $|x+a|<b$에서

$-b<x+a<b$ $\therefore -a-b<x<-a+b$

이 부등식의 해가 $1<x<5$이므로

$-a-b=1$, $-a+b=5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=2$

$(2a+b)x>2x+a+c$에 $a=-3$, $b=2$를 대입하면

$-4x>2x-3+c$, $-6x>-3+c$

$\therefore x<\frac{3-c}{6}$

이 부등식의 해가 $x<\frac{c}{3}$이므로

$\frac{3-c}{6}=\frac{c}{3}$, $3-c=2c$ $\therefore c=1$

$\therefore a+b+c=0$

답 0

18 전략 부등식을 정리한 후 a의 값의 범위를 나누어 주어진 조건을 만족시키는 경우를 찾는다.

풀이 주어진 부등식에서 $-4<|x+2|-a<4$

$\therefore a-4<|x+2|<a+4$ ⋯ ❶

(i) $0<a<4$일 때,

$a-4<|x+2|$에서

x는 모든 실수 …… ㉠

$|x+2|<a+4$에서

$-a-4<x+2<a+4$

$\therefore -a-6<x<a+2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-a-6<x<a+2$

정수 x의 최댓값이 5이려면

$5<a+2\le 6$ $\therefore 3<a\le 4$

그런데 $0<a<4$이므로 $3<a<4$ ⋯ ❷

(ii) $a=4$일 때,

$0<|x+2|<8$에서

$-8<x+2<0$ 또는 $0<x+2<8$

$\therefore -10<x<-2$ 또는 $-2<x<6$

이때 정수 x의 최댓값은 5이므로 조건을 만족시킨다. ⋯ ❸

(iii) $a>4$일 때,

$a-4<|x+2|$에서

$x+2<-a+4$ 또는 $x+2>a-4$

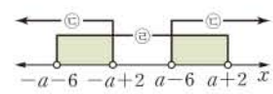
$\therefore x<-a+2$ 또는 $x>a-6$ …… ㉢

$|x+2|<a+4$에서

$-a-4<x+2<a+4$

$\therefore -a-6<x<a+2$ …… ㉣

오른쪽 그림에서 ㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는



$-a-6<x<-a+2$ 또는 $a-6<x<a+2$

그런데 $a>4$이므로 정수 x의 최댓값은 5가 될 수 없다. ⋯ ❹

이상에서 구하는 a의 값의 범위는

$3<a\le 4$ ⋯ ❺

답 $3<a\le 4$

$-a+2\ge a-6$이면 $a\le 4$이므로 모순이다.
$\therefore -a+2<a-6$

$a>4$에서 $a+2>6$이므로 x의 값의 범위에 5보다 큰 정수가 적어도 하나 포함된다.

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식을 정리할 수 있다.	10 %
❷ $0<a<4$일 때 주어진 조건을 만족시키는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ $a=4$일 때 주어진 조건을 만족시킴을 알 수 있다.	20 %
❹ $a>4$일 때 주어진 조건을 만족시키지 않음을 알 수 있다.	30 %
❺ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	10 %

19 전략 일차부등식의 해가 모든 실수일 조건을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

풀이 모든 실수 x에 대하여 $(2a-b)x+3a-2b<0$, 즉 $(2a-b)x<-3a+2b$가 성립하려면

$2a-b=0$, $-3a+2b>0$

$\therefore b=2a$, $a>0$

$b=2a$를 $-3a+2b>0$에 대입하면
$-3a+2\cdot 2a>0$
$\therefore a>0$

$b=2a$를 $(4a-3b)x^2+\frac{1}{2}bx+a+b>0$에 대입하면

$-2ax^2+ax+3a>0$

$-a<0$이므로 양변을 $-a$로 나누면

$2x^2-x-3<0$, $(x+1)(2x-3)<0$

$\therefore -1<x<\frac{3}{2}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 0, 1의 2개이다.

답 2

20 전략 손해를 보지 않기 위한 할인율과 이윤 사이의 대소 관계를 이용하여 n에 대한 이차부등식을 세운다.

풀이 손해를 보지 않고 사탕을 판매하려면 할인율이 25 % 이하가 되어야 한다.

$\frac{(n-20)^2}{100} \le 25$ ··· ❶

$(n-20)^2 \le 2500$, $n^2-40n-2100 \le 0$

$(n+30)(n-70) \le 0$

$\therefore -30 \le n \le 70$

그런데 $n>20$이므로 $20<n\le 70$ ··· ❷

따라서 손해를 보지 않으려면 고객이 한 번에 구입하는 사탕 A는 최대 70개로 제한해야 한다. ··· ❸

답 70개

채점 기준	비율
❶ n에 대한 이차부등식을 세울 수 있다.	30 %
❷ n의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 사탕 A를 최대 몇 개로 제한해야 하는지 구할 수 있다.	20 %

21 전략 주어진 이차부등식의 해가 $4\le x\le 7$을 포함하도록 하는 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 부등식 $x^2-(3a^2+2)x+2a^4+a^2-3\le 0$에서

$x^2-(3a^2+2)x+(2a^2+3)(a^2-1)\le 0$

$\{x-(2a^2+3)\}\{x-(a^2-1)\}\le 0$

$\therefore a^2-1\le x\le 2a^2+3$ ····· ㉠

$2a^2+3-(a^2-1)$
$=a^2+4>0$
$\therefore 2a^2+3>a^2-1$

따라서 $4\le x\le 7$인 모든 실수 x가 ㉠을 만족시키려면

$a^2-1\le 4$, $7\le 2a^2+3$

이어야 한다.

(i) $a^2-1\le 4$에서 $a^2\le 5$

$\therefore -\sqrt{5}\le a\le \sqrt{5}$

(ii) $2a^2+3\ge 7$에서 $a^2\ge 2$

$\therefore a\le -\sqrt{2}$ 또는 $a\ge \sqrt{2}$

(i), (ii)에서 공통부분을 구하면

$-\sqrt{5}\le a\le -\sqrt{2}$ 또는 $\sqrt{2}\le a\le \sqrt{5}$

이므로 정수 a는 -2, 2의 2개이다.

답 2

22 전략 먼저 이차부등식의 해가 모든 실수가 되도록 하는 k의 값의 범위를 구한다.

풀이 $x^2+(k-3)x+k>0$의 해가 모든 실수이려면 이차방정식 $x^2+(k-3)x+k=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=(k-3)^2-4k<0$

$k^2-10k+9<0$, $(k-1)(k-9)<0$

$\therefore 1<k<9$

즉 $1\le a<b\le 9$이므로 a의 최솟값은 1이고, b의 최댓값은 9이다.

따라서 구하는 합은

$1+9=10$

답 10

23 전략 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $px^2+qx+r>0$이 성립하려면 $p>0$, $q^2-4pr<0$임을 이용한다.

풀이 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$(a-2)x^2+2(a-2)x+3>0$이 성립하므로

$a-2>0$ $\therefore a>2$ ····· ㉠

이차방정식 $(a-2)x^2+2(a-2)x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-3(a-2)<0$

$a^2-7a+10<0$, $(a-2)(a-5)<0$

$\therefore 2<a<5$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2<a<5$ ··· ❶

부등식 $2|a+1|+3|a-6|\le 17$에서 $a+1>0$, $a-6<0$이므로

$2<a<5$이므로
$3<a+1<6$,
$-4<a-6<-1$

$2(a+1)-3(a-6)\le 17$, $-a\le -3$

$\therefore a\ge 3$

그런데 $2<a<5$이므로 $3\le a<5$ ··· ❷

따라서 구하는 실수 a의 최솟값은 3이다. ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 이차부등식이 성립하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❷ 절댓값을 포함한 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

24 전략 두 부등식의 해를 각각 구한 후 a의 값의 범위를 나누어 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 본다.

풀이 $x^2-3x-10\le 0$에서 $(x+2)(x-5)\le 0$

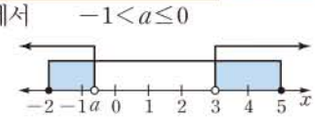
$\therefore -2\le x\le 5$

$x^2-(a+3)x+3a>0$에서

$(x-3)(x-a)>0$ ····· ㉠

(i) $a<3$이면 ㉠의 해는 $x<a$ 또는 $x>3$이므로 두 부등식을 동시에 만족시키는 정수 x가 4개이려면 다음 그림에서 $-1<a\le 0$

정수 x는
-2, -1, 4, 5



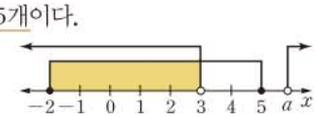
(ii) $a=3$이면 ㉠의 해는 $x\ne 3$인 모든 실수이므로 두 부등식을 동시에 만족시키는 정수 x는 7개이다.

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

정수 x는
-2, -1, 0, 1, 2, 4, 5

(iii) $a>3$이면 ㉠의 해는 $x<3$ 또는 $x>a$이므로 두 부등식을 동시에 만족시키는 정수 x는 다음 그림과 같이 최소 5개이다.

최소 5개에 포함되는 정수 x는
-2, -1, 0, 1, 2



따라서 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 구하는 실수 a의 값의 범위는

$-1<a\le 0$

답 $-1<a\le 0$

25 전략 a를 포함하지 않은 두 부등식의 공통부분을 먼저 구하여 나머지 부등식의 해의 위치에 따른 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 $x^2+x-42<0$에서 $(x+7)(x-6)<0$

$\therefore -7<x<6$ …… ㉠

$x^2+3x-4\geq 0$에서 $(x+4)(x-1)\geq 0$

$\therefore x\leq -4$ 또는 $x\geq 1$ …… ㉡

$(a^2-8)-(2a-10)=a^2-2a+2=(a-1)^2+1>0$이므로 $a^2-8>2a-10$

즉 부등식 $(x-2a+10)(x-a^2+8)<0$의 해는

$2a-10<x<a^2-8$ …… ㉢ ··· ❶

두 부등식 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 x의 값의 범위는

$-7<x\leq -4$ 또는 $1\leq x<6$

이므로 세 부등식 ㉠, ㉡, ㉢을 동시에 만족시키는 실수 x가 존재하지 않는 경우는 다음 세 가지 중의 하나이다.

(i) $a^2-8\leq -7$일 때, $-1\leq a\leq 1$

(ii) $-4\leq 2a-10<a^2-8\leq 1$일 때,

$-4\leq 2a-10$에서 $a\geq 3$ …… ㉣

$a^2-8\leq 1$에서 $-3\leq a\leq 3$ …… ㉤

㉣, ㉤의 공통부분을 구하면 $a=3$

(iii) $6\leq 2a-10$일 때, $a\geq 8$

이상에서 a의 값의 범위는

$-1\leq a\leq 1$ 또는 $a=3$ 또는 $a\geq 8$ ··· ❷

따라서 10 이하의 자연수 a는 1, 3, 8, 9, 10의 5개이다. ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 세 부등식의 해를 각각 구할 수 있다.	30 %
❷ 세 부등식을 동시에 만족시키는 실수 x가 존재하지 않도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
❸ 10 이하의 자연수 a의 개수를 구할 수 있다.	10 %

26 전략 모든 실수에 대하여 부등식 $A\leq B\leq C$가 성립하면 모든 실수에 대하여 두 부등식 $A\leq B$, $B\leq C$가 동시에 성립해야 함을 이용한다.

풀이 (i) $-1\leq (a-1)x+b$, 즉 $(a-1)x\geq -1-b$가 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a-1=0$, $-1-b\leq 0$

$\therefore a=1$, $b\geq -1$

(ii) $(a-1)x+b\leq x^2+2x+2$, 즉

$x^2+(3-a)x+2-b\geq 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 이차방정식 $x^2+(3-a)x+2-b=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=(3-a)^2-4(2-b)\leq 0$

위의 부등식에 $a=1$을 대입하여 정리하면

$4b-4\leq 0$ $\therefore b\leq 1$

(i), (ii)에서 $a=1$, $-1\leq b\leq 1$

따라서 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, -1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$

의 3개이다.

답 3

27 전략 부등식 $f(x)<y<g(x)$를 만족시키는 y가 항상 존재하기 위한 $f(x)$와 $g(x)$ 사이의 관계를 찾는다.

풀이 $f(x)=-x^2+2(a-1)x+2a-1$,

$g(x)=x^2-2(a-3)x+9$라 하면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<y<g(x)$를 만족시키는 y가 존재해야 하므로 부등식 $g(x)-f(x)>0$이 항상 성립해야 한다.

즉 $2x^2-4(a-2)x-2a+10>0$에서

$x^2-2(a-2)x-a+5>0$ ··· ❶

$g(x)-f(x)$
$=x^2-2(a-3)x+9$
$-\{-x^2+2(a-1)x$
$+2a-1\}$
$=2x^2-4(a-2)x-2a$
$+10$

이차방정식 $x^2-2(a-2)x-a+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a-2)\}^2-(-a+5)<0$

$a^2-3a-1<0$

$\therefore \frac{3-\sqrt{13}}{2}<a<\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ ··· ❷

이차방정식
$a^2-3a-1=0$에서
a
$=\frac{3\pm(\sqrt{(-3)^2-4\cdot(-1)}}{2}$
$=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

따라서 $m=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$, $n=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$이므로

$n-m=\sqrt{13}$ ··· ❸

답 $\sqrt{13}$

채점 기준	비율
❶ 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하는 이차부등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ $n-m$의 값을 구할 수 있다.	20 %

28 전략 이차방정식의 판별식의 부호, 두 근의 합 또는 곱의 부호를 이용하여 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 이차방정식

$x^2+2(a-2)x+a^2-3a-4=0$ …… ㉠

의 두 근을 α, β라 하고, 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-(a^2-3a-4)=-a+8$,

$\alpha+\beta=-2(a-2)$,

$\alpha\beta=a^2-3a-4=(a+1)(a-4)$

(i) ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가질 때,

$\frac{D}{4}=-a+8>0$에서 $a<8$

$\alpha+\beta=-2(a-2)>0$에서 $a<2$

$\alpha\beta=(a+1)(a-4)>0$에서

$a<-1$ 또는 $a>4$

따라서 $a<-1$이므로 정수 a의 최댓값은 -2이다.

(ii) ㉠이 서로 다른 두 음의 실근을 가질 때,

$\frac{D}{4}=-a+8>0$에서 $a<8$

$\alpha+\beta=-2(a-2)<0$에서 $a>2$

$\alpha\beta=(a+1)(a-4)>0$에서

$a<-1$ 또는 $a>4$

따라서 $4<a<8$이므로 정수 a의 최솟값은 5이다.

(i), (ii)에서 $M=-2$, $m=5$이므로

$Mm=-10$ 답 -10

최상위로 가는 최고 수준 문제

본책 88쪽

01

해결 단계

❶ 주어진 일차부등식의 해를 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.
❷ ❶을 이용하여 연립부등식을 이루는 일차부등식의 해를 각각 구한다.
❸ ㄱ. $a=1$일 때, 연립부등식의 해를 구하여 $f(1)$의 값을 구한다.
❹ ㄴ. $f(a)=0$인 a의 값을 구한다.
❺ ㄷ. a가 정수일 때 $f(a)$를 구하여 보기의 부등식을 만족시키는 a의 개수를 구한다.
❻ 옳은 보기를 찾아 답을 구한다.

풀이 ❶ 일차부등식 $(2a-b)x>a-4$의 해가 $x<1$이므로 $2a-b<0$ $\therefore x<\frac{a-4}{2a-b}$

즉 $\frac{a-4}{2a-b}=1$이므로 $a-4=2a-b$

$\therefore b=a+4$ …… ㉠

❷ $(a+2)x+3a<b(x-1)+6$에 ㉠을 대입하면

$(a+2)x+3a<(a+4)(x-1)+6$

$ax+2x+3a<ax+4x-a-4+6$

$-2x<-4a+2$ $\therefore x>2a-1$ …… ㉡

$ax+2a+b>(b-3)x+4$에 ㉠을 대입하면

$ax+2a+a+4>(a+4-3)x+4$

$ax+3a+4>ax+x+4$

$\therefore x<3a$ …… ㉢

❸ ㄱ. $a=1$이면 ㉡에서 $x>1$, ㉢에서 $x<3$이므로 주어진 연립부등식의 해는 $1<x<3$

위의 부등식을 만족시키는 정수 x는 2의 한 개이므로 $f(1)=1$

❹ ㄴ. $a=0$이면 ㉡에서 $x>-1$, ㉢에서 $x<0$이므로 주어진 연립부등식의 해는 $-1<x<0$

위의 부등식을 만족시키는 정수 x는 존재하지 않으므로 $f(0)=0$

따라서 $a=0$일 때 $f(a)=0$이지만 $a>-1$이다.

❺ ㄷ. 주어진 연립부등식의 해가 존재하려면 ㉡, ㉢에서

$2a-1<3a$, 즉 $a>-1$

이어야 한다. 이때 연립부등식의 해는

$2a-1<x<3a$이고, a가 정수이면

$f(a)=3a-(2a-1)-1=a$

즉 $1<f(a)<10-a$에서

$1<a<10-a$ $\therefore 1<a<5$

이때 $a=4$이면 ㉠에서 $b=8$이고, 부등식 $(2a-b)x>a-4$, 즉 $0\cdot x>0$은 해가 존재하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 a는 2, 3의 2개이다.

❻ 이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

1등급 비밀노트

ㄴ에서 $f(a)=0$인 경우를 연립부등식의 해가 없는 경우라고 생각하지 않도록 주의한다. 예를 들어 $a=0$이면 연립부등식의 해는 $-1<x<0$으로 존재하지만 부등식을 만족시키는 정수 x는 존재하지 않는다.

02

해결 단계

❶ 이차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 판별식을 이용하여 a의 값의 범위를 구한다.
❷ 이차방정식 $f(x)=0$에서 근과 계수의 관계를 이용하여 두 점 사이의 거리의 최댓값을 구한다.
❸ m, p의 값을 구하여 m^2+p^2의 값을 구한다.

풀이 ❶ 이차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+1)\}^2-3a^2>0$, $2a^2-2a-1<0$

$\therefore \frac{1-\sqrt{3}}{2}<a<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

이차방정식 $2a^2-2a-1=0$에서 $a=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-2\cdot(-1)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

❷ 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 이차방정식 $f(x)=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{2}{3}(a+1)$, $\alpha\beta=\frac{a^2}{3}$

$\therefore (\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=\frac{4}{9}(a+1)^2-\frac{4}{3}a^2$

$=-\frac{8}{9}\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2}{3}$

$\frac{1-\sqrt{3}}{2}<a<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$에서 $a=\frac{1}{2}$일 때 두 점 A, B 사이의 거리의 최댓값은

$-0.3\times\times\times<a<1.3\times\times\times$

$|\beta-\alpha|=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

❸ 따라서 $m=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $p=\frac{1}{2}$이므로

$m^2+p^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{11}{12}$ 답 $\frac{11}{12}$

03

해결 단계

❶ k의 값에 관계없이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점이 항상 존재하는 것의 의미를 이해한다.
❷ 이차방정식 $f(x)=g(x)$가 실근을 가질 조건을 구한다.
❸ ❷에서 얻은 k에 대한 이차부등식이 항상 성립하도록 하는 a의 값의 범위를 구한다.
❹ a의 최댓값과 최솟값의 합을 구한다.

ㄴ이 성립하지 않는 예를 찾는다.

$a<10-a$에서 $2a<10$ $\therefore a<5$

풀이 ❶ 실수 k의 값에 관계없이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점이 항상 존재하므로 방정식 $f(x)=g(x)$는 실수 k의 값에 관계없이 항상 실근을 갖는다.

❷ 이차방정식 $(x-1)(x-2)=k(x-a)$, 즉 $x^2-(k+3)x+2+ak=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=\{-(k+3)\}^2-4(2+ak)\geq 0$$

$$\therefore k^2+2(3-2a)k+1\geq 0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

❸ 부등식 ㉠이 모든 실수 k에 대하여 성립해야 하므로 k에 대한 이차방정식 $k^2+2(3-2a)k+1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=(3-2a)^2-1\leq 0$$

$$4a^2-12a+8\leq 0, \quad a^2-3a+2\leq 0$$

$$(a-1)(a-2)\leq 0 \quad \therefore 1\leq a\leq 2$$

❹ 따라서 실수 a의 최댓값은 2, 최솟값은 1이므로 구하는 합은 $2+1=3$ 답 ①

04

해결 단계

❶ 주어진 이차방정식이 두 실근을 가질 때, 판별식을 이용하여 a의 값의 범위를 구한다.

❷ $\frac{1}{2}\leq\frac{\beta}{\alpha}\leq 2$를 만족시키는 α, β에 대한 부등식을 구한다.

❸ 이차방정식의 근과 계수의 관계와 ❷에서 얻은 부등식을 이용하여 a의 값의 범위를 구한다.

❹ 정수 a의 값을 구한다.

풀이 ❶ 주어진 이차방정식이 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-a\geq 0$$

$$4-a\geq 0 \quad \therefore a\leq 4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

❷ $\frac{1}{2}\leq\frac{\beta}{\alpha}\leq 2$이므로

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}-2\right)\leq 0$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-\frac{5}{2}\cdot\frac{\beta}{\alpha}+1\leq 0$$

위의 식의 양변에 $2\alpha^2$을 곱하여 정리하면

$$2\alpha^2-5\alpha\beta+2\beta^2\leq 0$$

$$2\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}-5\alpha\beta\leq 0$$

$$\therefore 2(\alpha+\beta)^2-9\alpha\beta\leq 0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

❸ 이차방정식 $x^2-4x+a=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=a$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

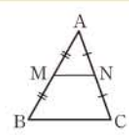
$$2\cdot 4^2-9a\leq 0, \quad 9a\geq 32$$

$$\therefore a\geq\frac{32}{9} \quad \cdots\cdots ㉣$$

❹ ㉠, ㉣에서 $\frac{32}{9}\leq a\leq 4$이므로 구하는 정수 a의 값은 4이다. 답 ⑤

일품 BOX

삼각형의 외심
① 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점이다.
② 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.



△ABC에서 두 변 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하면
$\overline{BC}\,/\!/\,\overline{MN}$,
$\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$

$a\leq X\leq b$이면
$(X-a)(X-b)\leq 0$

α는 실수이므로
$\alpha^2\geq 0$
이때 $\alpha\neq 0$에서 $\alpha\neq 0$이므로
$\alpha^2>0$

x축 위의 점의 좌표는 $(m,\ 0)$ 꼴이고 y축 위의 점의 좌표는 $(0,\ n)$ 꼴이다.

Ⅳ 도형의 방정식

09 평면좌표와 직선의 방정식

개념&핵심 기출

본책 90~93쪽

01 △OAB의 외심을 P라 하면

$$\overline{OP}=\overline{AP}=\overline{BP}$$

$\overline{OP}=\overline{AP}$에서 $\overline{OP}^2=\overline{AP}^2$이므로

$$2^2+(-1)^2=(2-1)^2+(-1-a)^2$$

$$a^2+2a-3=0, \quad (a+3)(a-1)=0$$

$$\therefore a=1\ (\because a>0)$$

$\overline{OP}=\overline{BP}$에서 $\overline{OP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$$2^2+(-1)^2=(2-b)^2+(-1)^2$$

$$b^2-4b=0, \quad b(b-4)=0$$

$$\therefore b=4\ (\because b>0)$$

$$\therefore a+b=5$$

답 5

02 점 P$(a,\ b)$가 직선 $y=x+2$ 위의 점이므로

$$b=a+2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$$(a-2)^2+(b+3)^2=(a-4)^2+(b-1)^2$$

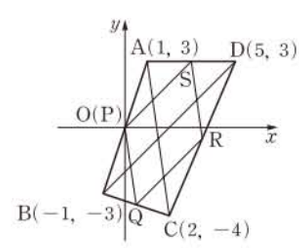
$$\therefore a+2b=1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$

$$\therefore ab=-1$$

답 ②

03 오른쪽 그림의 두 삼각형 ABC, ACD에서



$$\overline{PQ}=\overline{SR}=\frac{1}{2}\overline{AC}$$

또 두 삼각형 ABD, BCD에서

$$\overline{PS}=\overline{QR}=\frac{1}{2}\overline{BD}$$

이때

$$\overline{AC}=\sqrt{(2-1)^2+(-4-3)^2}=5\sqrt{2},$$

$$\overline{BD}=\sqrt{(5+1)^2+(3+3)^2}=6\sqrt{2}$$

이므로 사각형 PQRS의 둘레의 길이는

$$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{SR}+\overline{PS}=(\overline{PQ}+\overline{SR})+(\overline{PS}+\overline{QR})$$

$$=\overline{AC}+\overline{BD}$$

$$=11\sqrt{2}$$

답 ④

04 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot b+1\cdot(-6)}{2+1},\ \frac{2\cdot 3+1\cdot a}{2+1}\right)$$

$\therefore \left(\frac{2b-6}{3}, \frac{6+a}{3}\right)$

이 점이 x축 위에 있으므로

$\frac{6+a}{3}=0 \qquad \therefore a=-6$

선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\cdot b-2\cdot(-6)}{3-2}, \frac{3\cdot 3-2\cdot a}{3-2}\right)$

$\therefore (3b+12,\ 9-2a)$

이 점이 y축 위에 있으므로

$3b+12=0 \qquad \therefore b=-4$

$\therefore ab=24$ 답 ②

05 선분 AB를 $k:(1-k)$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{k\cdot 2+(1-k)\cdot(-4)}{k+(1-k)}, \frac{k\cdot(-5)+(1-k)\cdot 3}{k+(1-k)}\right)$

$\therefore (6k-4,\ -8k+3)$

이 점이 제3사분면 위에 있으려면

$6k-4<0,\ -8k+3<0$

$\therefore \frac{3}{8}<k<\frac{2}{3}$ 답 $\frac{3}{8}<k<\frac{2}{3}$

06 $3\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:3$

$a>0$이므로 점 C는 선분 AB를 4 : 3으로 외분하는 점이다.

즉 점 C의 좌표는

$\left(\frac{4\cdot 4-3\cdot(-2)}{4-3}, \frac{4\cdot 3-3\cdot(-1)}{4-3}\right)$

$\therefore (22,\ 15)$

따라서 $a=22,\ b=15$이므로

$a+b=37$ 답 ④

다른 풀이 $a>0$이므로 점 B는 선분 AC를 1 : 3으로 내분하는 점이다.

따라서 $\frac{1\cdot a+3\cdot(-2)}{1+3}=4,\ \frac{1\cdot b+3\cdot(-1)}{1+3}=3$이므로

$a-6=16,\ b-3=12$

$\therefore a=22,\ b=15$

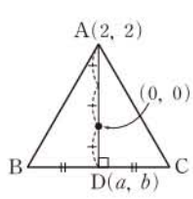
1등급 비밀노트

$\overline{AB}:\overline{BC}=1:3$을 만족시키는 점 C는 선분 AB를 4 : 3으로 외분하는 점과 2 : 3으로 외분하는 점의 2개가 존재한다.
그런데 선분 AB를 2 : 3으로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\cdot 4-3\cdot(-2)}{2-3}, \frac{2\cdot 3-3\cdot(-1)}{2-3}\right)$, 즉 $(-14,\ -9)$

이므로 $a>0$을 만족시키지 않는다.

07 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$의 중점을 $D(a,\ b)$라 하면 $\overline{AD}$를 2 : 1로 내분하는 점은 △ABC의 무게중심 (0, 0)과 일치한다.



즉 $\frac{2\cdot a+1\cdot 2}{2+1}=0,\ \frac{2\cdot b+1\cdot 2}{2+1}=0$이므로

$2a+2=0,\ 2b+2=0$

$\therefore a=-1,\ b=-1$

$\therefore D(-1,\ -1)$

이때 $\overline{AD}$의 길이는 정삼각형 ABC의 높이이고

$\overline{AD}=\sqrt{(2+1)^2+(2+1)^2}=3\sqrt{2}$

이므로 정삼각형의 한 변의 길이를 a라 하면

$\frac{\sqrt{3}}{2}a=3\sqrt{2} \qquad \therefore a=2\sqrt{6}$

따라서 정삼각형의 한 변의 길이는 $2\sqrt{6}$이다. 답 $2\sqrt{6}$

다른 풀이 위의 그림에서 점 (0, 0)을 점 O라 하면

$\overline{AO}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$이므로

$\overline{AD}=\frac{3}{2}\overline{AO}=3\sqrt{2}$

일품 BOX

$\overline{AO}:\overline{OD}=2:1$이므로
$\overline{AD}:\overline{AO}=3:2$
$2\overline{AD}=3\overline{AO}$
$\therefore \overline{AD}=\frac{3}{2}\overline{AO}$

$ad=bc$이면
$a:b=c:d$

08 점 P가 직선 $y=x+3$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(p,\ p+3)$이라 하자.

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(p-2)^2+(p+3-3)^2=(p+2)^2+(p+3+1)^2$

$2p^2-4p+4=2p^2+12p+20$

$16p=-16 \qquad \therefore p=-1$

$\therefore P(-1,\ 2)$

따라서 점 G의 좌표는

$\left(\frac{2-2-1}{3}, \frac{3-1+2}{3}\right)$, 즉 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

이므로 $a=-\frac{1}{3},\ b=\frac{4}{3}$

$\therefore a+4b=-\frac{1}{3}+\frac{16}{3}=5$ 답 5

09 $\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{0+6}{2}, \frac{1+ab}{2}\right) \qquad \therefore \left(3, \frac{1+ab}{2}\right)$

$\overline{BD}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{2+7}{2}\right) \qquad \therefore \left(\frac{a+b}{2}, \frac{9}{2}\right)$

평행사변형의 두 대각선의 중점이 일치한다.

□ABCD가 평행사변형이므로

$3=\frac{a+b}{2},\ \frac{1+ab}{2}=\frac{9}{2}$

$\therefore a+b=6,\ ab=8$

$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=6^3-3\cdot 8\cdot 6$

$=72$ 답 ⑤

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있다.
➡ (직선 AB의 기울기)
=(직선 BC의 기울기)
=(직선 AC의 기울기)

10 세 점이 한 직선 위에 있으려면 두 직선 AB, BC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{k-2}{3-(-3)}=\frac{k+1-k}{2k-3}$

$(k-2)(2k-3)=6$

$\therefore 2k^2-7k=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{7}{2}$이다. 답 $\frac{7}{2}$

일품 BOX: $2k^2-7k=0$에서 $k(2k-7)=0$ $\therefore k=0$ 또는 $k=\frac{7}{2}$

11 직선 l이 $\overline{BC}$와 만나는 점을 P라 하면 $S=3S_1$이므로 점 P는 $\overline{BC}$를 $2:1$로 내분하는 점이다.

즉 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot2+1\cdot(-7)}{2+1},\ \frac{2\cdot2+1\cdot(-1)}{2+1}\right)$$

$\therefore (-1,\ 1)$

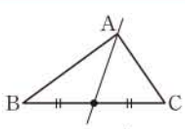
따라서 두 점 $A(1,\ 5)$, $P(-1,\ 1)$을 지나는 직선 l의 방정식은

$$y-5=\frac{1-5}{-1-1}(x-1)$$

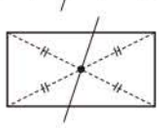
$\therefore y=2x+3$ 답 $y=2x+3$

1등급 비밀노트

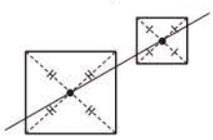
(1) 점 A를 지나는 직선이 △ABC의 넓이를 이등분한다.
➡ 직선이 변 BC의 중점을 지난다.



(2) 직선이 직사각형의 넓이를 이등분한다.
➡ 직선이 직사각형의 두 대각선의 교점을 지난다.



(3) 직선이 두 직사각형의 넓이를 각각 이등분한다.
➡ 직선이 각 직사각형의 대각선의 교점을 모두 지난다.



12 $3x+4y=k$ …… ㉠

$x-y=-1$ …… ㉡

$y=0$을 ㉠에 대입하면

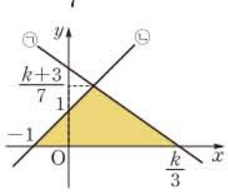
$3x=k \qquad \therefore x=\frac{k}{3}$

즉 직선 ㉠의 x절편은 $\frac{k}{3}$이다.

㉠$-$㉡$\times3$을 하면 $\quad 7y=k+3 \qquad \therefore y=\frac{k+3}{7}$

즉 두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 y좌표는 $\frac{k+3}{7}$이다.

오른쪽 그림에서 두 직선 ㉠, ㉡과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{14}{3}$이므로



$$\frac{1}{2}\left(\frac{k}{3}+1\right)\cdot\frac{k+3}{7}=\frac{14}{3}$$

$$\frac{(k+3)^2}{42}=\frac{14}{3}$$

$(k+3)^2=14^2, \qquad k+3=\pm14$

$\therefore k=-17$ 또는 $k=11$

그런데 $k>0$이므로 $\qquad k=11$ 답 11

13 두 직선 $x-y-1=0$, $x+ay=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x-y-1+k(x+ay)=0$ (k는 실수)

으로 놓으면

$(k+1)x+(ak-1)y-1=0$

이 직선이 직선 $2x+y-1=0$과 같으므로

$k+1=2,\ ak-1=1$

$k+1=2$에서 $\qquad k=1$

$k=1$을 $ak-1=1$에 대입하면

$a-1=1$

$\therefore a=2$ 답 2

다른 풀이 $2x+y-1=0$, 즉 $2x+y=1$과 $x-y=1$을 연립하여 풀면

$x=\frac{2}{3},\ y=-\frac{1}{3}$

따라서 두 직선 $2x+y-1=0$, $x-y=1$의 교점의 좌표가 $\left(\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$이고, 직선 $x+ay=0$이 이 점을 지나므로

$\frac{2}{3}+a\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=0 \qquad \therefore a=2$

14 두 직선 $2x-2y+3=0$, $2x+3y+a=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x-2y+3+k(2x+3y+a)=0$ (k는 실수)

으로 놓으면

$(2k+2)x+(3k-2)y+ak+3=0$

이 직선의 기울기는 $-\frac{2k+2}{3k-2}$이므로

$k=\frac{2}{3}$이면 y축에 평행한 직선이므로 기울기가 $-\frac{3}{2}$이 될 수 없다. $\therefore k\neq\frac{2}{3}$

$$-\frac{2k+2}{3k-2}=-\frac{3}{2}$$

$2(2k+2)=3(3k-2)$

$\therefore k=2$

따라서 직선 l의 방정식은

$6x+4y+2a+3=0$

이 직선이 점 $(3,\ b)$를 지나므로

$18+4b+2a+3=0$

$\therefore 2a+4b=-21$ 답 ⑤

15 두 직선 $2x+3y+4=0$, $x-2y-6=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x+3y+4+k(x-2y-6)=0$ (k는 실수)

으로 놓으면 이 직선이 점 $(1,\ -4)$를 지나므로

$-6+3k=0 \qquad \therefore k=2$

따라서 직선의 방정식은 $4x-y-8=0$이고, 이 직선과 x축, y축의 교점은 각각 $(2,\ 0)$, $(0,\ -8)$이므로 구하는 선분의 길이는

직선의 방정식에 $y=0$, $x=0$을 각각 대입한다.

$\sqrt{2^2+8^2}=2\sqrt{17}$ 답 ⑤

참고 두 직선의 방정식 $2x+3y+4=0$, $x-2y-6=0$을 연립하여 풀면 $x=\frac{10}{7}$, $y=-\frac{16}{7}$이므로 두 점 $\left(\frac{10}{7}, -\frac{16}{7}\right)$, $(1, -4)$를 지나는 직선의 방정식을 구해도 된다.

16 직선 $2x+3y-6=0$의 기울기는 $-\frac{2}{3}$이므로 두 점 $(-3, a)$, $(3, b)$를 지나는 직선의 기울기도 $-\frac{2}{3}$이다.

따라서 $\frac{b-a}{3+3}=-\frac{2}{3}$이므로

$b-a=-4$

$\therefore a-b=4$ 답 ②

17 두 점 $A(a, -2)$, $B(b, -3)$을 지나는 직선 AB가 직선 $x+y+1=0$과 수직이므로

$\frac{-3+2}{b-a}=1$

$\therefore a-b=1$ …… ㉠

또 두 점 A, B의 중점 $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{-2-3}{2}\right)$이 직선 $x+y+1=0$ 위에 있으므로

$\frac{a+b}{2}+\frac{-5}{2}+1=0$

$\therefore a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$

$\therefore a-3b=-1$ 답 ②

18 직선 $x+ay+2=0$이 직선 $2x-by-3=0$과 수직이므로

$1\cdot 2+a\cdot(-b)=0$

$\therefore ab=2$

직선 $x+ay+2=0$이 직선 $x-(b-3)y+4=0$과 평행하므로

$\frac{1}{1}=\frac{a}{-(b-3)}\neq\frac{2}{4}$

$-b+3=a$ $\therefore a+b=3$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=3^2-2\cdot 2=5$ 답 5

19 연립방정식 $\begin{cases} x-2y-4=0 \\ 3x+2y+4=0 \end{cases}$의 해는

$x=0$, $y=-2$

이므로 두 직선 $x-2y-4=0$, $3x+2y+4=0$의 교점의 좌표는 $(0, -2)$

구하는 직선의 기울기를 m이라 하면 그 직선의 방정식은 $y=mx-2$

일품 BOX

선분 AB의 수직이등분선을 l이라 하면
① 직선 l과 직선 AB의 기울기의 곱은 -1이다.
② 직선 l은 선분 AB의 중점을 지난다.

$y=3x-1$에서
$3x-y-1=0$
$y=-\frac{1}{3}x+1$에서
$\frac{1}{3}x+y-1=0$
$\therefore x+3y-3=0$

평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 임의의 점과 직선 l' 사이의 거리와 같다.

원점과 직선 $y=mx-2$, 즉 $mx-y-2=0$ 사이의 거리가 1이므로

$\frac{|-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$, $2=\sqrt{m^2+1}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4=m^2+1$, $m^2=3$

$\therefore m=\sqrt{3}$ 또는 $m=-\sqrt{3}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x-2$, $y=-\sqrt{3}x-2$

답 $y=\sqrt{3}x-2$, $y=-\sqrt{3}x-2$

20 점 P가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 (a, a)라 하자.

점 P에서 두 직선 $3x-y-1=0$, $x+3y-3=0$에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{|3a-a-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|a+3a-3|}{\sqrt{1^2+3^2}}$

$|2a-1|=|4a-3|$, $2a-1=\pm(4a-3)$

$\therefore a=1$ 또는 $a=\frac{2}{3}$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $(1, 1)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$이다.

답 $(1, 1)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

21 직선 $x+y-2=0$ 위의 점 $(2, 0)$과 직선 $x+y+m=0$ 사이의 거리가 $5\sqrt{2}$이므로

$\frac{|2+m|}{\sqrt{1^2+1^2}}=5\sqrt{2}$

$|m+2|=10$, $m+2=\pm 10$

$\therefore m=-12$ 또는 $m=8$

그런데 $m>0$이므로 $m=8$ 답 ④

22 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(x-4)^2+(y-5)^2=x^2+(y-3)^2$

$8x+4y-32=0$ $\therefore 2x+y-8=0$ 답 ④

23 점 B의 좌표를 (a, b), 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 점 $P(x, y)$는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$x=\frac{2\cdot a+1\cdot 3}{2+1}=\frac{2a+3}{3}$

$y=\frac{2\cdot b+1\cdot 1}{2+1}=\frac{2b+1}{3}$

$\therefore a=\frac{3x-3}{2}$, $b=\frac{3y-1}{2}$ …… ㉠

또 점 $B(a, b)$가 직선 $2x+y-5=0$ 위의 점이므로

$2a+b-5=0$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2\cdot\frac{3x-3}{2}+\frac{3y-1}{2}-5=0$

$\therefore 6x+3y-17=0$

따라서 $p=6$, $q=-17$이므로

$p+q=-11$ 답 -11

24 주어진 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 한 점을 $P(x, y)$라 하면 점 P에서 두 직선 $2x+5y+3=0$, $5x-2y-3=0$에 이르는 거리는 같으므로

$\frac{|2x+5y+3|}{\sqrt{2^2+5^2}}=\frac{|5x-2y-3|}{\sqrt{5^2+(-2)^2}}$

$|2x+5y+3|=|5x-2y-3|$

$2x+5y+3=\pm(5x-2y-3)$

$\therefore 3x-7y-6=0$ 또는 $7x+3y=0$

이때 원점을 지나지 않아야 하므로 구하는 직선의 방정식은

$3x-7y-6=0$ 답 ①

1등급을 위한 고난도 문제

본책 94~97쪽

01 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=(x-3)^2+(y-4)^2+(x+4)^2+(y-2)^2$

$+(x-7)^2+(y-3)^2$

$=3x^2-12x+3y^2-18y+103$

$=3(x-2)^2+3(y-3)^2+64$

따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$은 $x=2$, $y=3$일 때 최솟값 64를 가지므로 구하는 점 P의 좌표는 $(2, 3)$이다.

답 ③

$(x-2)^2\geq0$, $(y-3)^2\geq0$이므로 주어진 식의 값이 최소인 경우는 $(x-2)^2=0$, $(y-3)^2=0$, 즉 $x=2$, $y=3$일 때이다.

02 $\overline{AB}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

$\overline{BC}=\sqrt{a^2+(-1-3)^2}=\sqrt{a^2+16}$

$\overline{CA}=\sqrt{(-1-a)^2+1^2}=\sqrt{a^2+2a+2}$

(i) $\angle A=90°$인 경우

$\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2$이어야 하므로

$10+a^2+2a+2=a^2+16$, $2a=4$

$\therefore a=2$

(ii) $\angle B=90°$인 경우

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이어야 하므로

$10+a^2+16=a^2+2a+2$, $2a=24$

$\therefore a=12$

(iii) $\angle C=90°$인 경우

$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$이어야 하므로

$a^2+16+a^2+2a+2=10$

$\therefore a^2+a+4=0$

이때 이차방정식 $a^2+a+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot1\cdot4=-15<0$

이므로 $a^2+a+4=0$을 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

이상에서 $a=2$ 또는 $a=12$

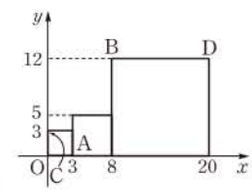
따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$2+12=14$ 답 14

03 가장 작은 정사각형의 한 꼭짓점 C의 y좌표가 3이므로 한 변의 길이는 3이다.

$\therefore A(3, 0)$ ··· ❶

오른쪽 그림에서 가장 큰 정사각형의 한 꼭짓점 D의 y좌표가 12이므로 한 변의 길이는 12이다.



$\therefore B(8, 12)$ ··· ❷

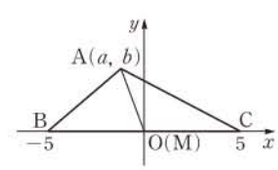
따라서 두 점 A, B 사이의 거리는

$\sqrt{(8-3)^2+12^2}=13$ ··· ❸

답 13

채점 기준	비율
❶ 점 A의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ 점 B의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ 두 점 A, B 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %

04 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 점 M을 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 M은 원점이다.



이때 1 km를 1로 생각하면

$B(-5, 0)$, $C(5, 0)$, $\overline{AB}=5$, $\overline{CA}=7$

이므로 $A(a, b)$라 하면

$\overline{AB}^2=25$에서

$(-5-a)^2+(-b)^2=25$

$\therefore a^2+10a+b^2=0$ ····· ㉠

$\overline{CA}^2=49$에서

$(a-5)^2+b^2=49$

$\therefore a^2-10a+b^2=24$ ····· ㉡

이때 입구 A에서 매점까지의 거리는

$\overline{AM}=\sqrt{a^2+b^2}$

㉠+㉡을 하면

$2(a^2+b^2)=24$

$\therefore a^2+b^2=12$

따라서 구하는 거리는

$\overline{AM}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ (km) 답 ②

1등급 비밀노트

△ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때,

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

이 성립한다.

이 내용을 기억해 두면 위와 같은 문제를 쉽게 해결할 수 있다. 즉 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이므로

$5^2+7^2=2(\overline{AM}^2+5^2)$, $\quad \overline{AM}^2=12$

$\therefore \overline{AM}=2\sqrt{3}$

05 점 A∘D의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot a+2\cdot(-3)}{1+2},\ \frac{1\cdot b+2\cdot 1}{1+2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a-6}{3},\ \frac{b+2}{3}\right)$$

점 A∘B의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot 3+2\cdot(-3)}{1+2},\ \frac{1\cdot 4+2\cdot 1}{1+2}\right)$$

$$\therefore (-1,\ 2)$$

점 (A∘B)∘C의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot 5+2\cdot(-1)}{1+2},\ \frac{1\cdot(-4)+2\cdot 2}{1+2}\right)$$

$$\therefore (1,\ 0)$$

이때 두 점 A∘D, (A∘B)∘C가 일치하므로

$$\frac{a-6}{3}=1,\ \frac{b+2}{3}=0$$

$$\therefore a=9,\ b=-2$$

$$\therefore a+b=7$$

답 7

06 비커 A의 소금물 200 g에 들어 있는 소금의 양은

$$200\cdot\frac{a}{100}=2a\ (\text{g})$$

이고, 비커 B의 소금물 300 g에 들어 있는 소금의 양은

$$300\cdot\frac{b}{100}=3b\ (\text{g})$$

이므로 비커 A의 소금물 200 g과 비커 B의 소금물 300 g을 섞었을 때의 소금물의 농도는

$$\frac{2a+3b}{200+300}\cdot 100=\frac{2a+3b}{5}\ (\%)$$

$$\therefore x=\frac{2a+3b}{5}$$

따라서 점 R는 선분 PQ를 3 : 2로 내분하는 점이므로

$$\frac{m}{n}=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

07 $\overline{AD}$가 ∠A의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$

이때

$\overline{AB}=\sqrt{(-5)^2+(-5-7)^2}=13$,

$\overline{AC}=\sqrt{4^2+(4-7)^2}=5$

이므로

$\overline{BD}:\overline{DC}=13:5$ ⋯ ❶

즉 점 D는 $\overline{BC}$를 13 : 5로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{13\cdot 4+5\cdot(-5)}{13+5},\ \frac{13\cdot 4+5\cdot(-5)}{13+5}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$ ⋯ ❷

따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{3}{2}$이므로

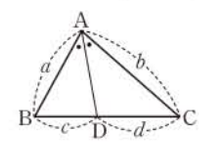
$a+b=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $\overline{BD}:\overline{DC}$를 구할 수 있다.	40 %
❷ 점 D의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

참고 △ABC에서 ∠A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 즉 ∠BAD=∠CAD일 때,

$a:b=c:d$



08 $3x=5c-2a$에서

$$x=\frac{5c-2a}{3}=\frac{5c-2a}{5-2}$$

$3y=5d-2b$에서

$$y=\frac{5d-2b}{3}=\frac{5d-2b}{5-2}$$

따라서 점 P$(x,\ y)$는 선분 AB를 5 : 2로 외분하는 점이므로

$\overline{AB}:\overline{BP}=3:2$, $\quad 3\overline{BP}=2\overline{AB}$

$$\therefore \overline{BP}=\frac{2}{3}\overline{AB}=\frac{2}{3}\cdot 20=\frac{40}{3}$$

답 $\frac{40}{3}$

09 △AOB의 한 변의 길이를 x라 하면 조건 (가)에 의하여

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=6\sqrt{3},\qquad x^2=24$$

$$\therefore x=2\sqrt{6}\ (\because x>0)$$

원점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 △AOB가 정삼각형이므로

$$\overline{OH}=\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sqrt{6}=3\sqrt{2}$$

한편 조건 (나)에 의하여 무게중심 G의 좌표를 $(k,\ k)$ $(k>0)$라 하면

$$\overline{OG}=\frac{2}{3}\overline{OH}=\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

이므로

$$\sqrt{k^2+k^2}=2\sqrt{2},\qquad k^2=4$$

$$\therefore k=2\ (\because k>0)$$

이때 △AOB의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{a+c}{3},\ \frac{b+d}{3}\right)$이므로

일품 BOX

점 A∘B는 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점이다.

(소금의 양) = (소금물의 양) × $\frac{(\text{농도})}{100}$

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

x는 길이이므로 양수이다.

$\frac{2a+3b}{5}=\frac{3b+2a}{3+2}$

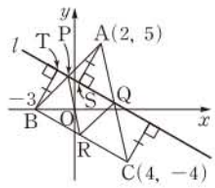
두 점 A, B가 제1사분면 위에 있으므로 △AOB의 무게중심 G는 제1사분면 위에 있다.

$\frac{a+c}{3}=2,\ \frac{b+d}{3}=2$

$\therefore a+c=6,\ b+d=6$

$\therefore a+b+c+d=12$ 답 12

10 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 S, T라 하면



△APS≡△BPT (ASA 합동)

이므로

$\overline{AP}=\overline{BP}$

같은 방법으로 하면 $\overline{AQ}=\overline{CQ}$ ··· ❶

따라서 세 점 P, Q, R는 각각 $\overline{AB}$, $\overline{CA}$, $\overline{BC}$의 중점이므로

$P\left(\frac{2-3}{2},\ \frac{5+0}{2}\right),\ Q\left(\frac{4+2}{2},\ \frac{-4+5}{2}\right),$

$R\left(\frac{-3+4}{2},\ \frac{0-4}{2}\right)$

$\therefore P\left(-\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right),\ Q\left(3,\ \frac{1}{2}\right),\ R\left(\frac{1}{2},\ -2\right)$ ··· ❷

$x=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}+3+\frac{1}{2}\right)=1,\ y=\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}-2\right)=\frac{1}{3}$

이므로

$x+y=\frac{4}{3}$ ··· ❸

답 $\frac{4}{3}$

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q가 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 중점임을 알 수 있다.	40 %
❷ 세 점 P, Q, R의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ $x+y$의 값을 구할 수 있다.	30 %

1등급 비밀노트

△PRQ는 △ABC의 세 변의 중점을 꼭짓점으로 하는 삼각형이므로 △ABC의 무게중심과 △PRQ의 무게중심은 일치한다. 이것을 이용하면 세 점 P, Q, R의 좌표를 구하지 않고 세 점 A, B, C의 좌표를 이용하여 답을 구할 수 있다.

11 $xy-2x+y=5$에서

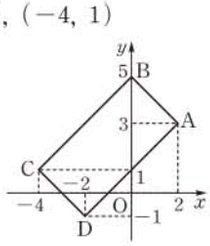
$x(y-2)+(y-2)=3$

$\therefore (x+1)(y-2)=3$ ····· ㉠

x, y는 정수이므로 ㉠을 만족시키는 정수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$는

$(0,\ 5),\ (2,\ 3),\ (-2,\ -1),\ (-4,\ 1)$

A(2, 3), B(0, 5), C(−4, 1), D(−2, −1)이라 하면 □ABCD는 오른쪽 그림과 같고,



$\overline{AB}=\sqrt{(-2)^2+(5-3)^2}$

$=2\sqrt{2},$

$\overline{BC}=\sqrt{(-4)^2+(1-5)^2}=4\sqrt{2},$

$\overline{CD}=\sqrt{(-2+4)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2},$

$\overline{DA}=\sqrt{(2+2)^2+(3+1)^2}=4\sqrt{2}$

이므로 □ABCD는 평행사변형이다.

따라서 두 대각선의 교점은 대각선 AC의 중점과 같으므로 그 좌표는

$\left(\frac{2-4}{2},\ \frac{3+1}{2}\right)$ $\therefore (-1,\ 2)$ 답 ③

마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분한다.

△APS, △BPT에서
∠ASP=∠BTP
=90°,
∠PAS=∠PBT,
$\overline{AS}=\overline{BT}$
∴ △APS≡△BPT
(ASA 합동)

$x+1$	$y-2$
1	3
3	1
−1	−3
−3	−1

12 직선 $3x+ay=b$는 선분 AC의 수직이등분선이다.

직선 AC의 기울기는 $\frac{-1-7}{7-1}=-\frac{4}{3}$

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+7}{2},\ \frac{7-1}{2}\right)$ $\therefore (4,\ 3)$

기울기가 $\frac{3}{4}$이고 점 (4, 3)을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{3}{4}(x-4)$ $\therefore 3x-4y=0$

이 직선이 직선 $3x+ay=b$와 같으므로

$a=-4,\ b=0$

$\therefore a+b=-4$ 답 −4

13 직선 $\frac{x}{6}+\frac{y}{10}=1$과 x축, y축의 교점을 각각 A, B라 하면

A(6, 0), B(0, 10)

직선 l이 직선 $\frac{x}{6}+\frac{y}{10}=1$과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 이등분하므로 선분 AB의 중점을 지나야 한다.

이때 선분 AB의 중점의 좌표는 (3, 5)이고, 직선 l이 원점을 지나므로 직선 l의 방정식은

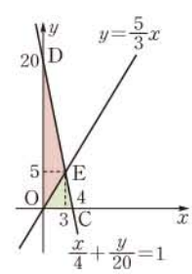
$y=\frac{5}{3}x$

한편 직선 $\frac{x}{4}+\frac{y}{20}=1$과 x축, y축의 교점을 각각 C, D라 하면

C(4, 0), D(0, 20)

두 직선 $y=\frac{5}{3}x$, $\frac{x}{4}+\frac{y}{20}=1$의 교점을 E라 하면

E(3, 5)



$\frac{x}{4}+\frac{y}{20}=1$이므로

$5x+y=20$

$y=\frac{5}{3}x$를 이 식에 대입하면

$5x+\frac{5}{3}x=20$

$\frac{20}{3}x=20$ $\therefore x=3$

$\therefore y=\frac{5}{3}\cdot 3=5$

원점을 O라 하면

$\triangle OCE=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5=10,$

$\triangle OED=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 3=30$

이므로

$S:T=10:30=1:3$ 답 ②

다른 풀이 점 E에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle DOC \backsim \triangle EHC$ (AA닮음)

이므로

$\overline{DC} : \overline{EC} = \overline{OC} : \overline{HC}$

$\overline{OC}=4$, $\overline{HC}=4-3=1$이므로

$\overline{DC} : \overline{EC} = 4 : 1$

따라서 점 E는 선분 CD를 $1:3$으로 내분하는 점이므로

$S : T = 1 : 3$

14 직선 AB의 방정식은

$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1 \qquad \therefore y=-2x+4$

$P(a,\ -2a+4)$라 하면 직선 OP의 기울기는

$\frac{-2a+4}{a}$이므로 직선 OQ의 방정식은

$y=\frac{a}{2a-4}x$

직선 AC의 방정식은

$\frac{x}{-4}+\frac{y}{4}=1 \qquad \therefore y=x+4$

두 직선 $y=x+4$, $y=\frac{a}{2a-4}x$의 교점 Q의 y좌표는

$y=\frac{a}{2a-4}(y-4)$에서 $\qquad (2a-4)y=a(y-4)$

$\therefore y=\frac{4a}{4-a}$

삼각형 COQ의 넓이가 2이므로

$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\left|\frac{4a}{4-a}\right|=2, \qquad \left|\frac{4a}{4-a}\right|=1$

$\frac{4a}{4-a}=\pm 1, \qquad 4a=\pm(4-a)$

$4a=4-a$에서 $\qquad a=\frac{4}{5}$

$4a=-(4-a)$에서 $\qquad a=-\frac{4}{3}$

따라서 구하는 점 P의 모든 x좌표의 합은

$\frac{4}{5}+\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{8}{15}$ 답 ①

참고 점 P의 x좌표가 0 또는 2이면 점 Q는 점 C 또는 점 A가 되므로 삼각형 COQ의 넓이가 2가 될 수 없다. 따라서 $a\neq 0$, $a\neq 2$이다.

15 $\triangle ABC$, $\triangle AOP$의 넓이가 같으므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4^2=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\overline{OP}$

$\therefore \overline{OP}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ ··· ❶

즉 직선 l의 x절편이 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$, y절편이 3이므로 직선 l의 방정식은

$\frac{3x}{8\sqrt{3}}+\frac{y}{3}=1 \qquad \therefore 3\sqrt{3}x+8y=24$ ··· ❷

일품 BOX

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 6=27$이고 직선 l이 점 $(1,\ 6)$을 지날 때 $\triangle DCB$의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6=18$이므로

$\frac{27}{2}<18$

이다.

$\therefore 1<a<4$

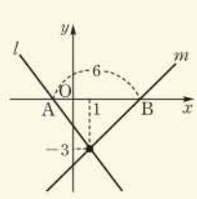
$y=x+4$에서

$x=y-4$

두 점 C, D를 지나는 직선

두 식을 연립하여 풀면

$x=1,\ y=-3$



따라서 $a=3\sqrt{3}$, $b=8$이므로

$a^2+b^2=(3\sqrt{3})^2+8^2=91$ ··· ❸

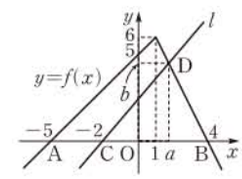
답 91

채점 기준	비율
❶ $\overline{OP}$의 길이를 구할 수 있다.	40 %
❷ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

16 $A(-5,\ 0)$, $B(4,\ 0)$이므로 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 C의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot 4+2\cdot(-5)}{1+2},\ 0\right)$, 즉 $(-2,\ 0)$

오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 직선 l이 만나는 점을 $D(a,\ b)$ $(1<a<4)$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 6=27$이므로



$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot b=\frac{1}{2}\cdot 27 \qquad \therefore b=\frac{9}{2}$

점 $\left(a,\ \frac{9}{2}\right)$는 직선 $y=-2x+8$ 위의 점이므로

$\frac{9}{2}=-2a+8 \qquad \therefore a=\frac{7}{4}$

따라서 직선 l의 기울기는

$\frac{\frac{9}{2}-0}{\frac{7}{4}+2}=\frac{6}{5}$ 답 $\frac{6}{5}$

17 직선 $x+y+2+k(x-y-4)=0$ (k는 실수)은 k의 값에 관계없이 두 직선

$x+y+2=0,\ x-y-4=0$

의 교점 $(1,\ -3)$을 지난다.

따라서 점 $(1,\ -3)$은 두 직선 l, m의 교점이고, $\overline{AB}=6$이므로 두 직선 l, m 및 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3=9$ 답 9

18 ㄱ. 주어진 직선은 k의 값에 관계없이 항상 두 직선

$x+y+1=0,\ x-y-5=0$

의 교점 $(2,\ -3)$을 지난다.

ㄴ. $k=-1$일 때, 주어진 직선의 방정식은

$x+y+1-(x-y-5)=0$

$\therefore y=-3$

따라서 x축에 평행한 직선이다.

ㄷ. $x+y+1+k(x-y-5)=0$에서

$(k-1)y=(k+1)x+1-5k$

(i) $k=1$이면 $\quad x=2$

(ii) $k\neq1$이면 $\quad y=\frac{k+1}{k-1}x+\frac{1-5k}{k-1}$

이때 기울기가 1이면 $\frac{k+1}{k-1}=1$에서

$k+1=k-1$

$\therefore 0\cdot k=-2$

위의 식을 만족시키는 k의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 기울기가 1인 직선은 나타낼 수 없다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

19 직선 AC의 기울기는

$\frac{0-6}{4-0}=-\frac{3}{2}$

이므로 직선 BH의 기울기는 $\frac{2}{3}$이다.

직선 BH의 방정식은

$y+1=\frac{2}{3}(x-1) \qquad \therefore y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$

$y=0$을 이 식에 대입하면

$0=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3} \qquad \therefore x=\frac{5}{2}$

따라서 선분 BH와 x축의 교점의 x좌표는 $\frac{5}{2}$이다.

답 ③

20 세 직선이 삼각형을 이루지 않으려면 두 직선이 서로 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

(i) 두 직선 $2x+y-4=0$, $mx+2y+4=0$이 평행할 때,

$\frac{m}{2}=\frac{2}{1}\neq\frac{4}{-4}$이므로 $\quad m=4$ ··· ❶

(ii) 두 직선 $3x+y-8=0$, $mx+2y+4=0$이 평행할 때,

$\frac{m}{3}=\frac{2}{1}\neq\frac{4}{-8}$이므로 $\quad m=6$ ··· ❷

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때,

$2x+y-4=0$, $3x+y-8=0$을 연립하여 풀면

$x=4$, $y=-4$

이므로 두 직선 $2x+y-4=0$, $3x+y-8=0$의 교점의 좌표는 $(4, -4)$이다.

따라서 직선 $mx+2y+4=0$이 점 $(4, -4)$를 지나므로

$4m+2\cdot(-4)+4=0$

$\therefore m=1$ ··· ❸

이상에서 모든 실수 m의 값의 합은

$4+6+1=11$ ··· ❹

답 11

두 직선 $2x+y-4=0$, $3x+y-8=0$의 기울기가 다르므로 세 직선이 모두 평행한 경우는 없다.

채점 기준	비율
❶ 두 직선 $2x+y-4=0$, $mx+2y+4=0$이 평행할 때의 m의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 두 직선 $3x+y-8=0$, $mx+2y+4=0$이 평행할 때의 m의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 세 직선이 한 점에서 만날 때의 m의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 조건을 만족시키는 모든 실수 m의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

참고 세 직선이 삼각형을 이루지 않을 조건

① 세 직선이 한 점에서 만난다.

② 두 직선이 서로 평행하다.

③ 세 직선이 모두 평행하다.

직선이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기가 θ $(0^\circ\leq\theta<90^\circ)$일 때, 직선의 기울기는 $\tan\theta$이다.

21 기울기가 $\tan 45^\circ=1$이고 점 $A(-1, 1)$을 지나는 직선 l의 방정식은

$y-1=x+1 \qquad \therefore y=x+2$

직선 OA의 기울기가 -1이므로 $\triangle AOB$는 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형이다.

(직선 AB의 기울기) $\times$ (직선 OA의 기울기) $=1\cdot(-1)=-1$ 이므로 $\overline{AB}\perp\overline{OA}$

$\overline{OA}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$,

$\overline{AB}=\sqrt{(a+1)^2+(b-1)^2}$

이고, $\triangle AOB$의 넓이가 5이므로

$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{(a+1)^2+(b-1)^2}=5$

$\sqrt{(a+1)^2+(b-1)^2}=5\sqrt{2}$

$\therefore (a+1)^2+(b-1)^2=50$ ····· ㉠

한편 점 $B(a, b)$는 직선 l 위의 점이므로

$b=a+2$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(a+1)^2+(a+1)^2=50, \qquad (a+1)^2=25$

$a^2+2a-24=0, \qquad (a+6)(a-4)=0$

$\therefore a=4$ $(\because a>0)$

$a=4$를 ㉡에 대입하면 $\quad b=6$

$\therefore a+b=10$

답 10

22 $\angle BAC=\angle BAO+\angle CAO$

$=\angle ACO+\angle CAO=90^\circ$

$\triangle AOC$에서 $\angle AOC=90^\circ$이므로 $\angle ACO+\angle CAO=90^\circ$

따라서 두 직선 l_1, l_2는 서로 수직이고, 직선 l_1의 기울기가 $\frac{4}{3}$이므로 직선 l_2의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이다.

이때 직선 l_2의 y절편이 4이므로 직선 l_2의 방정식은

$y=-\frac{3}{4}x+4$, 즉 $3x+4y-16=0$ 답 ③

23 $\overline{MN}\,/\!/\,\overline{BC}$이므로 구하는 거리는 점 N과 직선 BC 사이의 거리와 같다.

점 N의 좌표는 (1, 3)이고, 직선 BC의 방정식은

$$y=\frac{0+3}{2+2}(x-2),\qquad y=\frac{3}{4}(x-2)$$

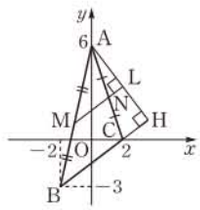
$$\therefore 3x-4y-6=0$$

따라서 두 직선 MN, BC 사이의 거리는

$$\frac{|3-12-6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3$$

답 ②

다른 풀이 점 A에서 변 BC의 연장선에 내린 수선의 발을 H, 두 직선 AH와 MN의 교점을 L이라 하면 구하는 거리는 $\overline{LH}$의 길이이다. $\overline{LH}=\frac{1}{2}\overline{AH}$이고, 직선 BC의 방정식은 $3x-4y-6=0$이므로



$$\overline{AH}=\frac{|0-24-6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=6$$

$$\therefore \overline{LH}=\frac{1}{2}\overline{AH}=\frac{1}{2}\cdot 6=3$$

24 점 P$(a,\ b)$가 두 직선 $3x+2y-5=0$과 $2x-3y+5=0$으로부터 같은 거리에 있으므로

$$\frac{|3a+2b-5|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{|2a-3b+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}$$

$$3a+2b-5=\pm(2a-3b+5)$$

$$\therefore a+5b=10 \text{ 또는 } 5a-b=0$$ ··· ❶

(i) $a+5b=10$일 때,

$$b=-\frac{a}{5}+2$$

조건 (가)에서 a, b가 자연수이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(5,\ 1)$이고 조건 (나)를 만족시킨다.

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(5,\ 1)$의 1개이다. ··· ❷

(ii) $5a-b=0$일 때,

$$b=5a$$

조건 (가)에서 a, b가 자연수이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 5)$, $(2,\ 10)$, $(3,\ 15)$,

$(4,\ 20)$, $(5,\ 25)$, $\cdots$

그런데 조건 (나)에서 $ab\le 100$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 5)$, $(2,\ 10)$, $(3,\ 15)$, $(4,\ 20)$의 4개이다. ··· ❸

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$$1+4=5$$ ··· ❹

답 5

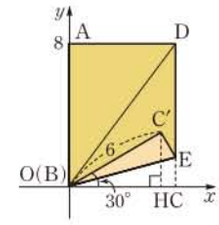
채점 기준	비율
❶ a, b 사이의 두 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❷ $a+5b=10$일 때의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ $5a-b=0$일 때의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구할 수 있다.	10 %

일품 BOX

직각삼각형 C′BH에서
$\overline{BH}=\overline{BC'}\cos 30^\circ$
$=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$,
$\overline{C'H}=\overline{BC'}\sin 30^\circ$
$=6\cdot\frac{1}{2}=3$

$k=-2$일 때
$2(k+2)^2+8$은 최솟값 8을 갖는다.

25 오른쪽 그림과 같이 두 직선 BC, AB를 각각 x축, y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이다.



$\angle EBC=\angle EBC'=15^\circ$이므로

$\angle C'BC=30^\circ$

점 C′에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 △C′BH에서 $\overline{BH}=3\sqrt{3}$, $\overline{C'H}=3$이므로 점 C′의 좌표는

$(3\sqrt{3},\ 3)$

직선 BD의 방정식은 $y=\frac{4}{3}x$, 즉 $4x-3y=0$이므로

점 C′$(3\sqrt{3},\ 3)$과 직선 BD 사이의 거리는

$$\frac{|12\sqrt{3}-9|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{12\sqrt{3}-9}{5}$$

따라서 $p=\frac{12}{5}$, $q=-\frac{9}{5}$이므로

$$p+q=\frac{3}{5}$$

답 ③

26 직선 $k(x+y)+4(x-1)=0$, 즉 $(k+4)x+ky-4=0$과 원점 사이의 거리는

$$f(k)=\frac{|-4|}{\sqrt{(k+4)^2+k^2}}=\frac{4}{\sqrt{2k^2+8k+16}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{2(k+2)^2+8}}$$

이므로 $2(k+2)^2+8$의 값이 최소일 때, $f(k)$의 값은 최대이다.

따라서 $f(k)$의 최댓값은 $\frac{4}{\sqrt{8}}=\sqrt{2}$

답 ①

참고 x의 값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수 $f(x)=a(x-m)^2+n$은
① $a>0$이면 $x=m$일 때, 최솟값 n을 갖는다.
② $a<0$이면 $x=m$일 때, 최댓값 n을 갖는다.

27 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{AP}^2+3\overline{BP}^2=4\overline{CP}^2$에서

$$\{(x+1)^2+(y-1)^2\}+3\{(x-1)^2+(y+3)^2\}$$

$$=4\{(x-5)^2+(y-3)^2\}$$ ··· ❶

$$4x^2+4y^2-4x+16y+32$$

$$=4x^2+4y^2-40x-24y+136$$

$$36x+40y=104$$

$$\therefore 9x+10y=26$$ ··· ❷

따라서 $a=9$, $b=10$이므로

$$ab=90$$ ··· ❸

답 90

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식을 x, y에 대한 등식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 점 P의 자취의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

28 점 $P(a+b,\ a-b)$가 직선 $2x+y=1$ 위에 있으므로

$2(a+b)+(a-b)=1$

$\therefore 3a+b=1$ …… ㉠

$a-b=x,\ a+b=y$로 놓으면

$a=\frac{x+y}{2},\ b=\frac{y-x}{2}$

$\begin{cases} a-b=x & \cdots ㉡ \\ a+b=y & \cdots ㉢ \end{cases}$

㉡+㉢을 하면

$2a=x+y$

$\therefore a=\frac{x+y}{2}$

㉢−㉡을 하면

$2b=y-x$

$\therefore b=\frac{y-x}{2}$

이것을 ㉠에 대입하면 점 Q의 자취의 방정식은

$3\cdot\frac{x+y}{2}+\frac{y-x}{2}=1$

$\therefore x+2y=1$ 답 ②

29 $\overline{BD}$ 위의 점을 $P(x,\ y)$라 하면 $\overline{BD}$는 $\angle ABC$를 이등분한다. 즉 점 P에서 두 직선 AB, BC 사이의 거리가 같으므로

$\frac{|3x-y+2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|ax+by+3|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\frac{|3x-y+2|}{\sqrt{10}}=\frac{|ax+by+3|}{2\sqrt{10}}$

$2|3x-y+2|=|ax+by+3|$

$6x-2y+4=\pm(ax+by+3)$

$\therefore (6-a)x-(2+b)y+1=0$

또는 $(a+6)x+(b-2)y+7=0$

(i) 직선 $(6-a)x-(2+b)y+1=0$이 직선 $8x-8y+7=0$일 때,

$8x-8y+7=0$의 양변을 7로 나누면

$\frac{8}{7}x-\frac{8}{7}y+1=0$이므로

$6-a=\frac{8}{7},\ 2+b=\frac{8}{7}$

$\therefore a=\frac{34}{7},\ b=-\frac{6}{7}$

그런데 $a^2+b^2\neq 40$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 직선 $(a+6)x+(b-2)y+7=0$이 직선 $8x-8y+7=0$일 때,

$a+6=8,\ b-2=-8$

$\therefore a=2,\ b=-6$

$a^2+b^2=2^2+(-6)^2$
$=40$
이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=2,\ b=-6$이므로

$a+b=-4$ 답 ①

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 98~99쪽

01 출발한 지 t초 후의 두 점 A, B의 좌표는 각각

$(-2+t,\ 0),\ (0,\ 3-2t)$

이므로 t초 후의 두 점 A, B 사이의 거리는

$\sqrt{(2-t)^2+(3-2t)^2}=\sqrt{5t^2-16t+13}$

$=\sqrt{5\left(t-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{1}{5}}$

따라서 출발한 지 $\frac{8}{5}$초 후에 두 점 A, B 사이의 거리는 최소가 되므로 $a=\frac{8}{5}$ 답 ④

02 점 P는 선분 AC를 3 : 4로 내분하는 점이므로

$p=\frac{3c+4a}{3+4}$ $\therefore 7p=4a+3c$ …… ㉠

또 점 P는 선분 BC를 3 : 4로 외분하는 점이므로

$p=\frac{3c-4b}{3-4}$ $\therefore p=4b-3c$ …… ㉡

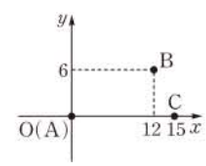
㉠+㉡을 하면 $8p=4a+4b$ $\therefore p=\frac{a+b}{2}$

점 Q는 선분 PC를 3 : 2로 외분하는 점이므로

$q=\frac{3c-2p}{3-2}=3c-2\cdot\frac{a+b}{2}=3c-a-b$

$\therefore q-3c=-a-b$ 답 ③

03 오른쪽 그림과 같이 직선 AC를 x축으로 하고 점 A를 지나고 직선 AC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 A는 원점이다.



이때 1 km를 1로 생각하면 $A(0,\ 0)$, $B(12,\ 6)$, $C(15,\ 0)$이고, 마을회관의 위치를 $P(p,\ q)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$이므로 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$에서

$p^2+q^2=(p-12)^2+(q-6)^2$

$\therefore 2p+q=15$ …… ㉠

또 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$에서

$p^2+q^2=(p-15)^2+q^2$

$30p=225$ $\therefore p=\frac{15}{2}$

$p=\frac{15}{2}$를 ㉠에 대입하면 $15+q=15$

$\therefore q=0$

$\therefore P\left(\frac{15}{2},\ 0\right)$

노인정의 위치를 Q라 하면 점 Q는 $\triangle ABC$의 무게중심이므로 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{0+12+15}{3},\ \frac{0+6+0}{3}\right)$ $\therefore (9,\ 2)$

$\therefore 4l^2=4\overline{PQ}^2=4\left\{\left(9-\frac{15}{2}\right)^2+2^2\right\}$

$=25$ 답 25

04 점 G의 y좌표를 p라 하면 $\triangle GOB$의 넓이가 32이므로

$\frac{1}{2}\cdot\overline{OB}\cdot p=32,$ $\frac{1}{2}\cdot 8p=32$

$\therefore p=8$

이때 점 G는 △ABC의 무게중심이므로

$\frac{4+0+b}{3}=8 \qquad \therefore b=20$

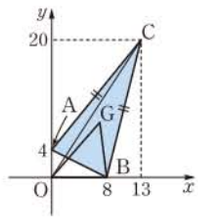
$\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로

$a^2+(20-4)^2=(a-8)^2+20^2$

$a^2+256=a^2-16a+464$

$16a=208 \qquad \therefore a=13$

오른쪽 그림에서



△CAB

$=$△CAO$+$△COB$-$△AOB

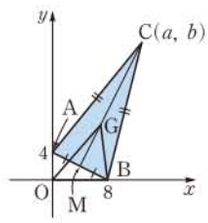
$=\frac{1}{2}\cdot4\cdot13+\frac{1}{2}\cdot8\cdot20$

$-\frac{1}{2}\cdot8\cdot4$

$=90$

답 90

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 선분 AB의 중점을 M이라 하면



M(4, 2)

삼각형 ABC가 이등변삼각형이므로

$\overline{AB}\perp\overline{CM}$

이등변삼각형의 꼭지각의 꼭짓점과 밑변의 중점을 지나는 직선은 밑변의 수직이등분선과 같다.

이때 직선 AB의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 CM의 기울기는 2이고, 점 M(4, 2)를 지나므로 직선 CM의 방정식은

$y-2=2(x-4) \qquad \therefore y=2x-6$

한편 점 G는 △ABC의 무게중심이므로 선분 CM을 2 : 1로 내분하는 점이다.

점 G의 y좌표를 p라 하면

$p=\frac{2\cdot2+1\cdot b}{2+1}=\frac{4+b}{3}$

그런데 삼각형 GOB의 넓이가 32이므로

$\frac{1}{2}\cdot\overline{OB}\cdot p=32, \qquad \frac{1}{2}\cdot8\cdot\frac{4+b}{3}=32$

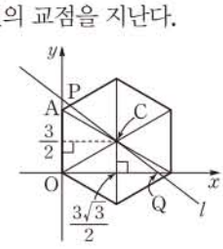
$\frac{4+b}{3}=8 \qquad \therefore b=20$

점 C$(a, 20)$은 직선 $y=2x-6$ 위의 점이므로

$20=2a-6 \qquad \therefore a=13$

05 직선 l이 정육각형의 넓이를 이등분하므로 직선 l은 정육각형의 가장 긴 세 대각선의 교점을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 정육각형의 가장 긴 세 대각선의 교점을 C라 하면



C$\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

즉 직선 l은 두 점 P$\left(0, \frac{7}{2}\right)$, C$\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

한 변의 길이가 3인 정삼각형의 높이는 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$이다.

$y-\frac{7}{2}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{7}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}-0}(x-0)$

$\therefore y=-\frac{4}{3\sqrt{3}}x+\frac{7}{2}$

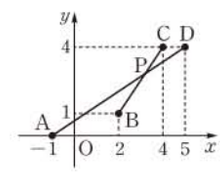
이 직선이 점 Q$(\sqrt{3}a, 0)$을 지나므로

$0=-\frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}a+\frac{7}{2}$

$\frac{4}{3}a=\frac{7}{2} \qquad \therefore a=\frac{21}{8}$

답 ③

06 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$의 값이 최소가 되려면 오른쪽 그림과 같이 점 P는 $\overline{AD}$ 위에 있고, 동시에 $\overline{BC}$ 위에 있어야 한다.



즉 $\overline{AD}$와 $\overline{BC}$의 교점이 P이어야 한다.

두 점 A, D를 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{4-0}{5+1}(x+1) \qquad \therefore y=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots ㉠$

두 점 B, C를 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{4-1}{4-2}(x-2) \qquad \therefore y=\frac{3}{2}x-2 \quad \cdots ㉡$

두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 x좌표는 $\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}=\frac{3}{2}x-2$에서

$4x+4=9x-12 \qquad \therefore x=\frac{16}{5}$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad y=\frac{14}{5}$

$\therefore a=\frac{16}{5}, \ b=\frac{14}{5}$

한편 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$의 최솟값은 $\overline{AD}+\overline{BC}$의 값이므로

$k=\sqrt{(5+1)^2+4^2}+\sqrt{(4-2)^2+(4-1)^2}$

$=3\sqrt{13}$

$\therefore a+b+k^2=\frac{16}{5}+\frac{14}{5}+(3\sqrt{13})^2$

$=6+117=123$

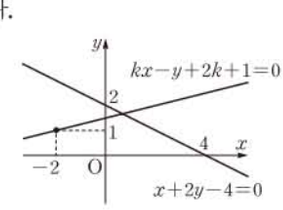
답 123

07 $kx-y+2k+1=0$에서

$k(x+2)+(1-y)=0$

이므로 직선 $kx-y+2k+1=0$은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, 1)$을 지난다.

또 직선 $x+2y-4=0$은 오른쪽 그림과 같으므로 두 직선이 제1사분면에서 만나려면 직선 $kx-y+2k+1=0$이 두 점 $(0, 2)$, $(4, 0)$을 잇는 선분 사이를 지나야 한다.



(i) 직선 $kx-y+2k+1=0$이 점 $(0,\ 2)$를 지날 때,

$$-2+2k+1=0 \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$$

(ii) 직선 $kx-y+2k+1=0$이 점 $(4,\ 0)$을 지날 때,

$$4k+2k+1=0 \qquad \therefore k=-\frac{1}{6}$$

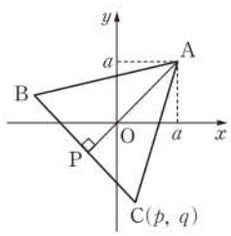
(i), (ii)에서 $-\frac{1}{6}<k<\frac{1}{2}$이므로

$\alpha=-\frac{1}{6},\ \beta=\frac{1}{2}$

$\therefore 3(\alpha+\beta)=1$ 답 1

$k=-\frac{1}{6},\ k=\frac{1}{2}$일 때는 두 직선의 교점이 각각 x축, y축 위에 있으므로 제1사분면에 포함되지 않는다.

08 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 P라 하면



$$\overline{AP}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4=2\sqrt{3}$$

△ABC의 무게중심이 원점이므로 오른쪽 그림에서

$$\overline{OA}=\frac{2}{3}\overline{AP}$$

$\overline{AP}$는 $\overline{BC}$의 수직이등분선이므로 점 O는 $\overline{AP}$ 위에 있다.

$\overline{OA}=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$이므로

$\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}$
$=\sqrt{2}a\ (\because a>0)$

$$\sqrt{2}a=\frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{3}, \qquad \sqrt{2}a=\frac{4\sqrt{3}}{3} \qquad \therefore a=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

또 $2\overline{OP}=\overline{OA}$이므로

$$P\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2}\right)$$

이때 두 직선 PA, PC는 서로 수직이므로 직선 PC의 기울기는 -1이다. 즉

직선 PA의 방정식은 $y=x$

$$\frac{q+\frac{a}{2}}{p+\frac{a}{2}}=-1, \qquad q+\frac{a}{2}=-p-\frac{a}{2}$$

$\therefore p+q=-a$

$$\therefore (p+q)^2=(-a)^2=\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{8}{3}$$ 답 ④

09 ㄱ. 직선 l의 방정식을 a에 대하여 정리하면

$$a(x+2y)+(6-3y)=0$$

이 직선이 a의 값에 관계없이 항상 두 직선

$$x+2y=0,\ 6-3y=0$$

의 교점을 지나므로 위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=-4,\ y=2$$

따라서 직선 l은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-4,\ 2)$를 지난다.

ㄴ. 직선 $x+2y-1=0$과 직선

$l: ax+(2a-3)y+6=0$이 평행하려면

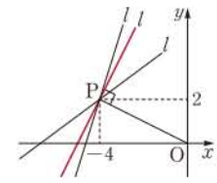
$$\frac{a}{1}=\frac{2a-3}{2}\neq\frac{6}{-1}$$

$\frac{a}{1}=\frac{2a-3}{2}$에서 $\quad 2a=2a-3$

$\therefore 0\cdot a=-3$

이 식을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않으므로 직선 $x+2y-1=0$과 평행한 직선 l은 존재하지 않는다.

ㄷ. 점 $P(-4,\ 2)$라 하면 직선 l은 점 P를 지나는 직선이다. 오른쪽 그림에서 원점 O와 직선 l 사이의 거리가 최대가 될 때는 직선 l이 직선 OP와 수직일 때이다.



즉 직선 OP의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 l의 기울기가 2일 때 원점 O와 직선 l사이의 거리가 최대이다.

$ax+(2a-3)y+6=0$에서

$$(2a-3)y=-ax-6$$

(i) $2a-3=0$, 즉 $a=\frac{3}{2}$이면 $\qquad x=-4$

이 직선의 방정식은 기울기가 2가 될 수 없다.

(ii) $2a-3\neq 0$, 즉 $a\neq\frac{3}{2}$이면 기울기가 2이어야 하므로 $\qquad -\frac{a}{2a-3}=2$

$$-a=4a-6 \qquad \therefore a=\frac{6}{5}$$

따라서 원점 O와 직선 l 사이의 거리는 $a=\frac{6}{5}$일 때 최대이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

참고 ㄷ에서 원점과 직선 l 사이의 거리는 $\frac{|6|}{\sqrt{a^2+(2a-3)^2}}$이므로 $a^2+(2a-3)^2$의 값이 최소일 때의 a의 값을 구해도 된다.

10 직선 $mx-y-3m+1=0$, 즉

$$y=m(x-3)+1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(3,\ 1)$을 지나므로 직선 ㉠이 사각형 ABCD와 만나려면 직선 ㉠이 선분 BD를 지나야 한다.

(i) 직선 ㉠이 점 $B(-1,\ 3)$을 지날 때,

$$3=-4m+1 \qquad \therefore m=-\frac{1}{2}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $D(1,\ 5)$를 지날 때,

$$5=-2m+1 \qquad \therefore m=-2$$

(i), (ii)에서 $\qquad -2\leq m\leq -\frac{1}{2}$

한편 직선 ㉠과 직선 $sx-y-5s+2=0$, 즉 $y=sx-5s+2$가 수직이므로

$$ms=-1 \qquad \therefore s=-\frac{1}{m}$$

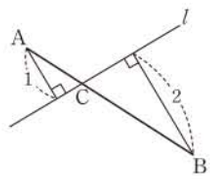
$-2\leq m\leq -\frac{1}{2}$에서

$-2 \le \frac{1}{m} \le -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \le -\frac{1}{m} \le 2$

$\therefore \frac{1}{2} \le s \le 2$

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=2$이므로 $\alpha+\beta=\frac{5}{2}$ 답 ②

11 직선 l과 선분 AB의 교점을 C라 하면 두 점 A, B와 직선 l 사이의 거리가 각각 1, 2이므로



$\overline{AC} : \overline{BC} = 1 : 2$

즉 점 C는 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$C\left(\frac{1\cdot5+2\cdot2}{1+2}, \frac{1\cdot(-4)+2\cdot2}{1+2}\right)$ $\therefore C(3, 0)$

따라서 직선 l은 점 C(3, 0)을 지나므로 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$y=m(x-3)$ $\therefore mx-y-3m=0$

직선 l과 점 A(2, 2) 사이의 거리가 1이므로

$\frac{|2m-2-3m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$, $|-m-2|=\sqrt{m^2+1}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$m^2+4m+4=m^2+1$, $4m=-3$

$\therefore m=-\frac{3}{4}$

따라서 직선 l의 방정식은 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}$이므로 y절편은 $\frac{9}{4}$이다. 답 $\frac{9}{4}$

12 원 C_1의 중심이 그리는 자취 l은 직선 $12x-5y+24=0$과 평행한 직선이고, 이 두 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 1과 같다.

원 C_2 위의 점 P에서 직선 l에 이르는 거리의 최솟값은 직선 l과 직선 $12x-5y-67=0$ 사이의 거리에서 원 C_2의 지름의 길이인 2를 뺀 값이다.

따라서 구하는 거리의 최솟값은 두 직선 $12x-5y+24=0$, $12x-5y-67=0$ 사이의 거리에서 3을 뺀 값과 같다.

직선 $12x-5y+24=0$ 위의 점 $(-2, 0)$과 직선 $12x-5y-67=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-24-67|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=7$

이므로 구하는 거리의 최솟값은 $7-3=4$ 답 4

1등급 비밀노트

직선 l과 직선 $12x-5y+24=0$ 사이의 거리가 1임을 이용하여 직선 l의 방정식을 직접 구해 문제를 해결할 수도 있지만 위의 해설과 같은 원리를 이용하여 주어진 두 직선의 방정식만으로도 문제를 해결할 수 있다.

일품 BOX

왼쪽 그림의 두 직각삼각형은 닮음이다.

$(a+1, -a)$

$17=12+ab$에서 $ab=5$

① x축에 접하는 원에서 (반지름의 길이) $=|$(중심의 y좌표)$|$
② y축에 접하는 원에서 (반지름의 길이) $=|$(중심의 x좌표)$|$
③ x축, y축에 동시에 접하는 원에서 (반지름의 길이) $=|$(중심의 x좌표)$|$ $=|$(중심의 y좌표)$|$

10 원의 방정식

개념&핵심 기출

본책 100~102쪽

01 원의 중심이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로 원의 중심을 $C(a, 2a)$라 하자.

$\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(a+1)^2+(2a-3)^2=(a-4)^2+(2a+2)^2$

$5a^2-10a+10=5a^2+20$, $10a=-10$

$\therefore a=-1$

따라서 $C(-1, -2)$이고 원의 반지름의 길이는 $\overline{AC}$의 길이와 같으므로

$\overline{AC}=\sqrt{(-1+1)^2+(-2-3)^2}=5$ 답 ③

02 주어진 원의 방정식을 변형하면

$\{x-(a+1)\}^2+(y+a)^2=-a^2+2a+3$

이므로 반지름의 길이

$\sqrt{-a^2+2a+3}=\sqrt{-(a-1)^2+4}$

가 최대일 때 원의 넓이가 최대이다.

따라서 $a=1$일 때 원의 넓이가 최대이고, 이때 원의 중심의 좌표는 $(2, -1)$이다. 답 ①

03 직각삼각형의 외접원의 중심은 빗변의 중점이므로 외접원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{2+6}{2}, \frac{1+5}{2}\right)$, 즉 $(4, 3)$

또 외접원의 반지름의 길이는 두 점 $(2, 1)$, $(4, 3)$ 사이의 거리이므로

$\sqrt{(4-2)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$

따라서 외접원의 방정식은

$(x-4)^2+(y-3)^2=8$

$\therefore x^2+y^2-8x-6y+17=0$ … ㉠

$(x-2)(x-6)+(y+a)(y+b)=0$에서

$x^2+y^2-8x+(a+b)y+12+ab=0$ … ㉡

즉 $a+b=-6$, $ab=5$이므로

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=(-6)^2-2\cdot5$

$=26$ 답 26

04 주어진 원이 점 $(2, 0)$에서 x축에 접하므로 원의 중심의 x좌표는 2이고, 원의 중심의 좌표를 $(2, a)$ $(a>0)$라 하면 원의 반지름의 길이는 a이다.

또 이 원이 직선 $x-2y+2=0$에 접하므로 원의 중심 $(2, a)$와 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같다. 즉

$\frac{|2+(-2)\cdot a+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=a$, $|-2a+4|=\sqrt{5}a$

$4a^2-16a+16=5a^2$, $a^2+16a-16=0$

$\therefore a=-8+4\sqrt{5}$ ($\because a>0$)

따라서 $m=-8$, $n=4$이므로

$|m|+|n|=8+4=12$ 답 12

05 x축, y축에 동시에 접하면서 점 $(-1,\ 2)$를 지나는 원의 중심은 제2사분면 위에 있으므로 주어진 원의 중심의 좌표를 $(-k,\ k)$ $(k>1)$라 하면 원의 방정식은

$(x+k)^2+(y-k)^2=k^2$

이 원이 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$(-1+k)^2+(2-k)^2=k^2$

$k^2-6k+5=0$

$(k-1)(k-5)=0$

$\therefore k=5\ (\because k>1)$

원의 반지름의 길이가 k이고 원의 반지름의 길이는 1보다 크므로 $k>1$

따라서 주어진 원의 방정식은

$(x+5)^2+(y-5)^2=25$

즉 $x^2+y^2+10x-10y+25=0$이므로

$a=10,\ b=-10,\ c=25$

$\therefore a+b+c=25$ 답 ⑤

06 점 B의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{OB}:\overline{AB}=3:2$이므로

$2\overline{OB}=3\overline{AB}$, $\quad 4\overline{OB}^2=9\overline{AB}^2$

$4(x^2+y^2)=9\{(x-5)^2+y^2\}$

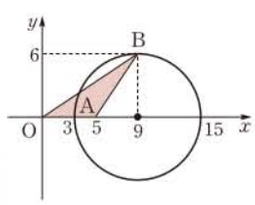
$5x^2+5y^2-90x+225=0$

$x^2+y^2-18x+45=0$

$\therefore (x-9)^2+y^2=36$

따라서 점 B는 중심이 점 $(9,\ 0)$이고 반지름의 길이가 6인 원 위를 움직인다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$를 밑변으로 하면 높이가 원의 반지름의 길이일 때 삼각형 OAB의 넓이가 최대이므로 삼각형 OAB의 넓이의 최댓값은



삼각형 OAB의 밑변의 길이가 일정하므로 높이가 최대일 때, 넓이가 최대이다.

$\frac{1}{2}\cdot5\cdot6=15$ 답 15

다른 풀이 선분 OA를 $3:2$로 내분하는 점을 C, 외분하는 점을 D라 하면

$C(3,\ 0)$, $D(15,\ 0)$

점 B의 자취는 두 점 C, D를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이므로 중심은 $\overline{CD}$의 중점인 점 $(9,\ 0)$이고 반지름의 길이는 6이다.

즉 점 B의 자취의 방정식은

$(x-9)^2+y^2=36$

07 $(x-4)^2+(y+2)^2=26$에서

$x^2+y^2-8x+4y-6=0$

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2-4+k(x^2+y^2-8x+4y-6)=0\ (k\neq-1)$ …… ㉠

이라 하면 이 원이 점 $(5,\ 0)$을 지나므로

$21-21k=0$

$\therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입한 후 정리하면

$2x^2+2y^2-8x+4y-10=0$

$x^2+y^2-4x+2y-5=0$

$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=10$

따라서 구하는 원의 넓이는 10π이다. 답 ①

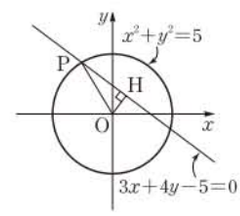
반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 원의 넓이는 10π이다.

08 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-5-(x^2+y^2-3x-4y)=0$

$\therefore 3x+4y-5=0$

오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=5$의 중심 $O(0,\ 0)$에서 직선 $3x+4y-5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하고, 원 $x^2+y^2=5$와 직선 $3x+4y-5=0$의 한 교점을 P라 하자.



이때

$\overline{OH}=\frac{|-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$

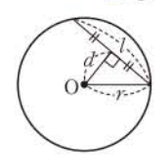
이므로 직각삼각형 POH에서

$\overline{PH}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$

따라서 공통인 현의 길이는

$2\overline{PH}=2\cdot2=4$ 답 ③

참고 현의 길이는 원의 중심에서 현에 수선을 내려 직각삼각형을 만든 다음, 피타고라스 정리를 이용하여 구한다.



즉 반지름의 길이가 r인 원의 중심에서 d만큼 떨어진 현의 길이를 l이라 하면

$l=2\sqrt{r^2-d^2}$

09 직선 l_1의 방정식은

$x^2+y^2-8-(x^2+y^2+4x-6y+12)=0$

$\therefore 2x-3y+10=0$ …… ㉠

직선 l_2의 방정식은

$x^2+y^2-8-(x^2+y^2-6x-4y+12)=0$

$\therefore 3x+2y-10=0$ …… ㉡

두 직선 l_1, l_2의 x절편은 각각 $-5,\ \frac{10}{3}$

$2x-3y+10=0$에 $y=0$을 대입하면

$2x+10=0$

$\therefore x=-5$

$3x+2y-10=0$에 $y=0$을 대입하면

$3x-10=0$

$\therefore x=\frac{10}{3}$

㉠×3−㉡×2를 하면

$-13y+50=0$

$\therefore y=\frac{50}{13}$

즉 두 직선 l_1, l_2의 교점의 y좌표는 $\frac{50}{13}$이므로 두 직선 l_1, l_2와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{10}{3}+5\right)\cdot\frac{50}{13}=\frac{25^2}{39}$$

$\therefore a=25$ 답 25

10 (i) 직선 $y=mx+2$, 즉 $mx-y+2=0$과 원 $x^2+y^2=1$이 만나지 않으려면 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1보다 커야 하므로

$$\frac{|2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}>1,\qquad \sqrt{m^2+1}<2$$

$$m^2+1<4,\qquad m^2<3$$

$$\therefore -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$$

(ii) 직선 $mx-y+2=0$과 원 $x^2+y^2-6x-4y+9=0$, 즉 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$가 만나지 않으려면 원의 중심 $(3,\ 2)$와 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2보다 커야 하므로

$$\frac{|3m-2+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}>2,\qquad |3m|>2\sqrt{m^2+1}$$

$$9m^2>4m^2+4,\qquad m^2>\frac{4}{5}$$

$$\therefore m<-\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } m>\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(i), (ii)에서

$$-\sqrt{3}<m<-\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } \frac{2\sqrt{5}}{5}<m<\sqrt{3}$$

답 $-\sqrt{3}<m<-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 또는 $\frac{2\sqrt{5}}{5}<m<\sqrt{3}$

다른 풀이 (i) $y=mx+2$를 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$$x^2+(mx+2)^2=1$$

$$\therefore (1+m^2)x^2+4mx+3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(2m)^2-(1+m^2)\cdot 3<0$$

$$m^2<3$$

$$\therefore -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$$

(ii) $y=mx+2$를 $x^2+y^2-6x-4y+9=0$에 대입하면

$$x^2+(mx+2)^2-6x-4(mx+2)+9=0$$

$$\therefore (1+m^2)x^2-6x+5=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=(-3)^2-(1+m^2)\cdot 5<0$$

$$m^2>\frac{4}{5}$$

$$\therefore m<-\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } m>\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(i), (ii)에서

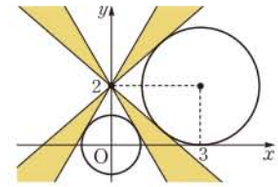
$$-\sqrt{3}<m<-\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } \frac{2\sqrt{5}}{5}<m<\sqrt{3}$$

일품 BOX

원의 방정식과 직선의 방정식에서 한 문자를 소거하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선의 위치 관계는
① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다.
② $D=0$ ➡ 한 점에서 만난다. (접한다.)
③ $D<0$ ➡ 만나지 않는다.

이차방정식 $4m^2+9m+4=0$의 판별식을 D라 하면
$D=9^2-4\cdot4\cdot4$
$=17>0$
이므로 이차방정식 $4m^2+9m+4=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

참고 직선 $y=mx+2$는 m의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 2)$를 지나므로 직선이 두 원과 모두 만나지 않을 때는 오른쪽 그림에서 직선이 색칠한 부분에 있을 때이다.



11 $x^2+y^2-4x-2y=m$에서

$$(x-2)^2+(y-1)^2=m+5$$

이 원의 중심을 C라 하면 점 C$(2,\ 1)$과 직선 $x-y-3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-1-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{m+5}$이고 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

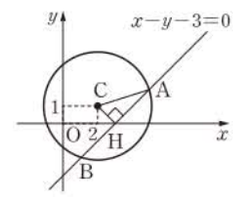
$$\sqrt{m+5}>\sqrt{2},\qquad m+5>2$$

$$\therefore m>-3$$

따라서 정수 m의 최솟값은 -2이므로

$$a=-2$$

한편 점 C에서 직선 $x-y-3=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot 6=3$$

직각삼각형 CHA에서

$$(\sqrt{m+5})^2=(\sqrt{2})^2+3^2$$

$$m+5=11\qquad \therefore m=6$$

즉 $\overline{AB}=6$을 만족시키는 m의 값은 6이므로

$$b=6$$

$$\therefore a+b=4$$

답 4

12 $x^2+y^2+2x=0$에서 $\quad (x+1)^2+y^2=1$

$x^2+y^2-4x+6y+12=0$에서

$$(x-2)^2+(y+3)^2=1$$

원 $(x-2)^2+(y+3)^2=1$의 넓이를 이등분하는 직선은 이 원의 중심 $(2,\ -3)$을 지나므로 구하는 직선의 기울기를 m이라 하면

$$y=m(x-2)-3$$

이 직선이 원 $(x+1)^2+y^2=1$에 접하므로 이 원의 중심 $(-1,\ 0)$과 직선 $y=m(x-2)-3$, 즉 $mx-y-2m-3=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1과 같다. 즉

$$\frac{|-m-2m-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

$$|3m+3|=\sqrt{m^2+1},\qquad 8m^2+18m+8=0$$

$$\therefore 4m^2+9m+4=0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 직선의 기울기의 합은 $-\frac{9}{4}$이다. 답 ①

13 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$$ax+by=5 \qquad \therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{5}{b}$$

이 직선과 직선 $y=-\frac{1}{2}x+1$이 수직이므로

$$-\frac{a}{b}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

$\therefore a=-2b$ …… ㉠

또 점 $(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=5$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(-2b)^2+b^2=5, \qquad 5b^2=5$

$\therefore b^2=1$

따라서 $a^2=4b^2=4$이므로

$a^2b^2=4$ 답 ④

다른 풀이 직선 $y=-\frac{1}{2}x+1$과 수직인 직선의 기울기는 2이고, 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 원의 접선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{5}\cdot\sqrt{2^2+1}$

$\therefore y=2x\pm5$

이 직선이 점 $(a,\ b)$를 지나므로

$b=2a\pm5$ …… ㉠

또 점 $(a,\ b)$는 원 위의 점이므로

$a^2+b^2=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=1$ 또는 $a=2,\ b=-1$

$\therefore a^2b^2=4\cdot1=4$

14 접점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 접선의 방정식은

$ax+by=5$

이 직선이 점 $(3,\ -1)$을 지나므로

$3a-b=5$ …… ㉠

또 점 $(a,\ b)$는 원 위의 점이므로

$a^2+b^2=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-2$ 또는 $a=2,\ b=1$

따라서 접선의 방정식은 $x-2y=5$ 또는 $2x+y=5$이므로

$m_1m_2=\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1$ 답 -1

15 직선 $y=3x-1$과 평행한 직선의 기울기는 3이고, 원 $x^2+y^2=10$의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이므로 접선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{10}\cdot\sqrt{3^2+1}$

$\therefore y=3x\pm10$

일품 BOX

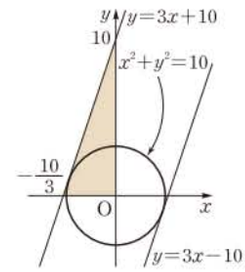
두 원 O, O'의 반지름의 길이가 각각 5, 3이므로
$\overline{OH}=\overline{OA}-\overline{HA}$
$=\overline{OA}-\overline{O'B}$
$=5-3=2$

두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이가 각각 1, 2이므로
$\overline{C_1H}=\overline{C_1A}+\overline{AH}$
$=\overline{C_1A}+\overline{BC_2}$
$=1+2=3$

$b=2a+5$를 ㉡에 대입하면
$a^2+(2a+5)^2=5$
$a^2+4a+4=0$
$(a+2)^2=0$
$\therefore a=-2$
$\therefore b=2\cdot(-2)+5$
$=1$
$b=2a-5$를 ㉡에 대입하면
$a^2+(2a-5)^2=5$
$a^2-4a+4=0$
$(a-2)^2=0$
$\therefore a=2$
$\therefore b=2\cdot2-5=-1$

그런데 직선 l은 제2사분면에서 원에 접하므로 직선 l의 방정식은

$y=3x+10$



따라서 직선 l이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $\left(-\frac{10}{3},\ 0\right)$, $(0,\ 10)$이므로

직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

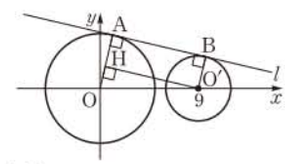
$\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot10=\frac{50}{3}$ 답 ③

16 두 원 O, O'의 중심의 좌표는 각각

$O(0,\ 0)$, $O'(9,\ 0)$

$\therefore \overline{OO'}=9$

오른쪽 그림과 같이 점 O'에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{OH}=5-3=2$

따라서 직각삼각형 $OO'H$에서

$\overline{AB}=\overline{O'H}$

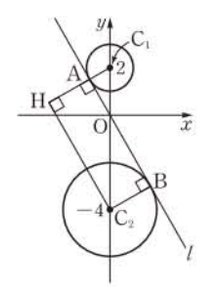
$=\sqrt{9^2-2^2}=\sqrt{77}$ 답 ④

17 두 원 C_1, C_2의 중심의 좌표는 각각

$C_1(0,\ 2)$, $C_2(0,\ -4)$

$\therefore \overline{C_1C_2}=|2-(-4)|=6$

오른쪽 그림과 같이 점 C_2에서 선분 C_1A의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{C_1H}=1+2=3$

따라서 직각삼각형 C_1HC_2에서

$\overline{AB}=\overline{HC_2}$

$=\sqrt{6^2-3^2}$

$=3\sqrt{3}$

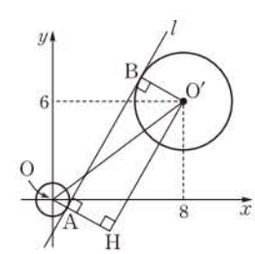
답 $3\sqrt{3}$

18 두 원 O, O'의 중심의 좌표는 각각

$O(0,\ 0)$, $O'(8,\ 6)$

$\therefore \overline{OO'}=\sqrt{8^2+6^2}=10$

오른쪽 그림과 같이 점 O'에서 선분 OA의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{OH}=1+r$,

$\overline{HO'}=\overline{AB}=2\sqrt{21}$

따라서 직각삼각형 OHO'에서

$10^2=(1+r)^2+(2\sqrt{21})^2, \qquad (1+r)^2=16$

$1+r=\pm4$

$\therefore r=3\ (\because r>0)$ 답 3

1등급을 위한 고난도 문제

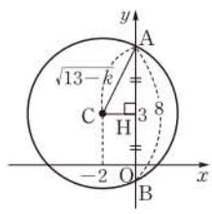
본책 103~105쪽

01 $x^2+y^2+4x-6y+k=0$에서

$(x+2)^2+(y-3)^2=13-k$ $(k<13)$

이므로 이 원은 중심이 점 $(-2,\ 3)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{13-k}$이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하고 점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=4,\ \overline{CH}=2$

이므로 직각삼각형 ACH에서

$(\sqrt{13-k})^2=4^2+2^2$

$13-k=20$

$\therefore k=-7$

답 -7

다른 풀이 $x=0$을 $x^2+y^2+4x-6y+k=0$에 대입하면

$y^2-6y+k=0$

이때 두 점 A, B는 y축 위의 점이므로 $A(0,\ \alpha)$, $B(0,\ \beta)$로 놓으면 이차방정식 $y^2-6y+k=0$의 두 근은 $\alpha,\ \beta$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=k$

이고, $\overline{AB}=|\alpha-\beta|=8$이므로

$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$64=36-4k \qquad \therefore k=-7$

02 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$a^2+b^2=4$ …… ㉠

△ABP의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{5+4+a}{3},\ \frac{0+6+b}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{9+a}{3},\ \frac{6+b}{3}\right)$

이므로 $\frac{9+a}{3}=x,\ \frac{6+b}{3}=y$로 놓으면

$a=3x-9,\ b=3y-6$

이것을 ㉠에 대입하면

$(3x-9)^2+(3y-6)^2=4$

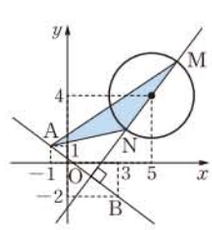
$9(x-3)^2+9(y-2)^2=4$

$\therefore (x-3)^2+(y-2)^2=\frac{4}{9}$

따라서 점 G가 나타내는 원의 중심의 좌표는 $(3,\ 2)$이다.

답 ④

03 오른쪽 그림과 같이 원 $(x-5)^2+(y-4)^2=r^2$의 중심 $(5,\ 4)$를 지나고 직선 AB에 수직인 직선이 원과 만나는 두 점이 M, N이다.



직선 AB의 기울기는

$\frac{-2-1}{3+1}=-\frac{3}{4}$

이므로 직선 MN의 방정식은

$y-4=\frac{4}{3}(x-5) \qquad \therefore 4x-3y-8=0$

점 $A(-1,\ 1)$과 직선 $4x-3y-8=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-4-3-8|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=3$

이므로 삼각형 AMN의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot 3=3r$

따라서 $3r=10$에서 $\qquad r=\frac{10}{3}$

답 ③

1등급 비밀노트

$\overline{AB}$의 길이는 정해져 있으므로 △ABP의 넓이가 최대, 최소일 때는 점 P에서 직선 AB에 이르는 거리가 각각 최대, 최소일 때임을 이용하여 두 점 M, N의 위치를 찾는다.

04 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다.

(i) 원의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있을 때,

중심의 좌표를 $(a,\ a)$라 하면

$(a-1)^2+(a+2)^2=17$에서

$a^2+a-6=0, \qquad (a+3)(a-2)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=2$

(ii) 원의 중심이 직선 $y=-x$ 위에 있을 때,

중심의 좌표를 $(a,\ -a)$라 하면

$(a-1)^2+(-a+2)^2=17$에서

$a^2-3a-6=0$

$\therefore a=\frac{3+\sqrt{33}}{2}$ 또는 $a=\frac{3-\sqrt{33}}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 모든 원의 반지름의 길이의 합은

$|-3|+|2|+\left|\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right|+\left|\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right|$

$=3+2+\frac{3+\sqrt{33}}{2}+\frac{-3+\sqrt{33}}{2}$

$=5+\sqrt{33}$

이므로 $\qquad m=5,\ n=33$

$\therefore m+n=38$

답 38

05 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$이므로

$\overline{AP}=2\overline{BP}, \qquad \overline{AP}^2=4\overline{BP}^2$

$(x+1)^2+y^2=4\{(x-2)^2+y^2\}$

$x^2+y^2-6x+5=0$

$\therefore (x-3)^2+y^2=4$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 $(3,\ 0)$이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

일품 BOX

이 방정식이 원을 나타내려면

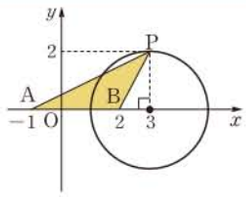
$13-k>0$

$\therefore k<13$

x축, y축에 동시에 접하는 원의 중심의 좌표가 $(k,\ k)$ 또는 $(k,\ -k)$일 때, 반지름의 길이는 $|k|$이다.

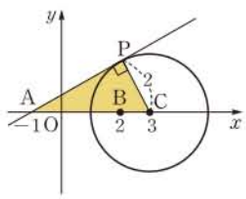
ㄱ. 점 P가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 2인 원이므로 그 둘레의 길이는 $2\pi\cdot2=4\pi$

ㄴ. 오른쪽 그림에서 △PAB의 넓이의 최댓값은



$$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot2$$
$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2=3$$

ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 직선 AP가 원에 접할 때 ∠PAB의 크기가 최대이고, 원의 중심을 C라 하면 ∠APC=90°이므로



$$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{PC}^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$$

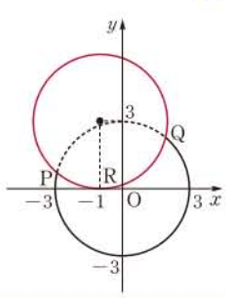
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ④

06 점 R는 두 점 $(-3,\ 0)$, $(3,\ 0)$을 잇는 선분을 $1:2$로 내분하므로 점 R의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot3+2\cdot(-3)}{1+2},\ \frac{1\cdot0+2\cdot0}{1+2}\right),\ 즉\ (-1,\ 0)$$

⋯ ❶

이때 세 점 P, Q, R를 지나는 원은 주어진 원과 같은 호를 가지므로 주어진 원과 반지름의 길이가 같고 점 R에서 x축에 접한다. ⋯ ❷



따라서 구하는 원은 중심이 점 $(-1,\ 3)$, 반지름의 길이가 3인 원이므로 그 방정식은

$$(x+1)^2+(y-3)^2=9$$ ⋯ ❸

답 $(x+1)^2+(y-3)^2=9$

채점 기준	비율
❶ 점 R의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ 세 점 P, Q, R를 지나는 원이 어떤 원인지 알 수 있다.	50 %
❸ 세 점 P, Q, R를 지나는 원의 방정식을 구할 수 있다.	20 %

07 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2+4x-8+k(x^2+y^2-4x-8)=0 \quad (k\neq-1)$$

이라 하면

$$(k+1)x^2+(k+1)y^2+(4-4k)x-8-8k=0$$

이 원의 중심이 원점이려면 x의 계수가 0이어야 하므로

$$4-4k=0 \qquad \therefore k=1$$

따라서 원의 방정식은

$$2x^2+2y^2-16=0,\ 즉\ x^2+y^2=8$$

이므로 원의 넓이는 8π이다. 답 ④

일품 BOX

점 P가 (3, 2)일 때 △PAB의 넓이가 최대이다.

$\overline{OP}$의 중점 $\left(\frac{4+0}{2},\ \frac{2+0}{2}\right)$, 즉 (2, 1)을 중심으로 하고 반지름의 길이가

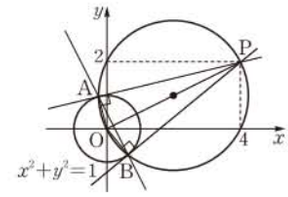
$$\frac{1}{2}\overline{OP}=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+2^2}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}=\sqrt{5}$$

인 원이다.

원의 반지름의 길이가 3이고 원이 x축에 접하므로 원의 중심의 y좌표는 3이다.

중심이 원점인 원의 방정식은 $x^2+y^2=r^2$ 꼴이므로 x, y의 계수는 모두 0이다.

08 오른쪽 그림과 같이 점 P(4, 2)에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선의 접점을 각각 A, B라 하면



$$\angle OAP=\angle OBP=90^\circ$$

이므로 위의 그림과 같이 두 점 A, B는 선분 OP를 지름으로 하는 원 위에 있다.

$\overline{OP}$를 지름으로 하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(y-1)^2=5$$
$$\therefore x^2+y^2-4x-2y=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

따라서 $\overline{AB}$는 원 $x^2+y^2=1$과 원 ㉠의 공통인 현이므로 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-1-(x^2+y^2-4x-2y)=0$$
$$\therefore 4x+2y-1=0$$

답 $4x+2y-1=0$

다른 풀이 한 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=1$

이 직선이 점 P(4, 2)를 지나므로 $4x_1+2y_1=1$

이때 또 다른 접점의 좌표를 $(x_2,\ y_2)$라 하면 $4x_2+2y_2=1$을 만족시키므로 두 접점을 지나는 직선의 방정식은 $4x+2y-1=0$

09 m이 0이 아닌 실수일 때, 이차방정식 $(x-y+2)+m(x^2+y^2-4)=0$이 나타내는 도형은 직선 $x-y+2=0$과 원 $x^2+y^2-4=0$의 교점을 지나는 원이다.

$x-y+2=0$에서 $y=x+2$이므로 이것을 $x^2+y^2-4=0$에 대입하면

$$x^2+(x+2)^2-4=0, \qquad x^2+2x=0$$
$$x(x+2)=0 \qquad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=0$$

즉 직선 $x-y+2=0$과 원 $x^2+y^2-4=0$의 교점의 좌표는 $(-2,\ 0)$, $(0,\ 2)$

주어진 이차방정식이 나타내는 도형은 두 점 $(-2,\ 0)$, $(0,\ 2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원일 때, 그 넓이가 최소이다.

두 점 $(-2,\ 0)$, $(0,\ 2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원은 중심이 점 $(-1,\ 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{1^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$이므로 이 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-1)^2=2$$
$$\therefore x^2+y^2+2x-2y=0 \quad \cdots ㉠$$

$(x-y+2)+m(x^2+y^2-4)=0$에서

$$mx^2+my^2+x-y-4m+2=0$$
$$2mx^2+2my^2+2x-2y-8m+4=0 \quad \cdots ㉡$$

㉠과 ㉡이 같으려면 $2m=1,\ -8m+4=0$

$$\therefore m=\frac{1}{2}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=2\pi$이므로

$\frac{b}{a}=4\pi$ 답 ④

1등급 비밀노트

주어진 이차방정식을 정리하면

$x^2+y^2+px+qy+r=0$

의 꼴로 나타낼 수 있으므로 주어진 이차방정식이 나타내는 도형은 원이다.

또 $m\neq0$일 때, m의 값에 관계없이 $x-y+2=0$, $x^2+y^2-4=0$을 만족시키는 x, y의 값이 존재하므로 주어진 원은 위의 두 방정식을 연립하여 푼 해, 즉 직선 $x-y+2=0$과 원 $x^2+y^2-4=0$의 교점을 항상 지난다.

10 원 $x^2+y^2+ax-3ay+4=0$이 원 $x^2+y^2+2ax-4ay+16=0$의 둘레의 길이를 이등분하므로 두 원의 교점을 지나는 직선이 원 $x^2+y^2+2ax-4ay+16=0$의 중심을 지나야 한다. ··· ❶

주어진 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+ax-3ay+4$
$-(x^2+y^2+2ax-4ay+16)$
$=0$

$-ax+ay-12=0$

$\therefore ax-ay+12=0$ ····· ㉠ ··· ❷

$x^2+y^2+2ax-4ay+16=0$에서

$(x+a)^2+(y-2a)^2=5a^2-16$ ····· ㉡

즉 직선 ㉠이 원 ㉡의 중심 $(-a,\ 2a)$를 지나므로

$a\cdot(-a)-a\cdot2a+12=0$

$a^2=4$ $\quad\therefore a=2\ (\because a>0)$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 두 원의 교점을 지나는 직선이 둘레의 길이가 이등분되는 원의 중심을 지나야 함을 알 수 있다.	20 %
❷ 주어진 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

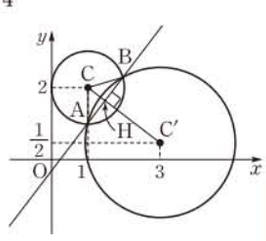
11 $x^2+y^2-2x-4y+4=0$에서

$(x-1)^2+(y-2)^2=1$

$x^2+y^2-6x-y+k=0$에서

$(x-3)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{37}{4}-k$

오른쪽 그림과 같이 두 원의 중심을 각각 C, C′, 두 원의 교점을 각각 A, B라 하고, $\overline{CC'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 H라 하면



$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{4}{5}$

직각삼각형 CAH에서

$\overline{CH}=\sqrt{1^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

한편 두 원의 공통인 현, 즉 직선 AB의 방정식은

$x^2+y^2-2x-4y+4-(x^2+y^2-6x-y+k)=0$

$\therefore 4x-3y+4-k=0$

점 C(1, 2)에서 직선 AB에 이르는 거리는 $\overline{CH}$의 길이와 같으므로

$\frac{|4-6+4-k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{3}{5}$

$|2-k|=3,\quad 2-k=\pm3$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=5$

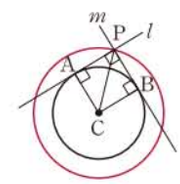
따라서 모든 실수 k의 값의 합은 4이다. 답 ④

12 $x^2+y^2+4x-8y-12=0$에서

$(x+2)^2+(y-4)^2=32$ ····· ㉠

원 ㉠의 중심을 C라 하면 $\quad$ C$(-2,\ 4)$

두 직선 l, m의 교점을 P라 하면 두 직선 l, m은 수직이므로 점 P가 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같이 중심이 C이고 반지름이 $\overline{CP}$인 원이다.



두 직선 l, m과 원 ㉠의 접점을 각각 A, B라 하면 사각형 PACB는 정사각형이므로

$\overline{CP}=\sqrt{2}\cdot\overline{AC}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}=8$

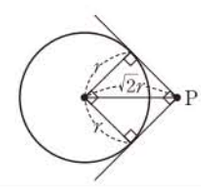
따라서 점 P가 나타내는 도형의 길이는

$2\pi\cdot8=16\pi$ 답 ④

1등급 비밀노트

원 밖의 한 점 P에서 원에 그은 두 접선이 수직일 때, 점 P의 자취

➡ 주어진 원과 중심의 좌표가 같고, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}r$인 원이다.



13 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AB}=\frac{3}{2}$이므로 $\quad\overline{AH}=\frac{3}{4}$

즉 점 A의 y좌표가 $\frac{3}{4}$이므로 $x^2+y^2=1$에 $y=\frac{3}{4}$을 대입하면

$x^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2=1,\quad x^2=\frac{7}{16}$

$\therefore x=\frac{\sqrt{7}}{4}\ (\because x>0)$

따라서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{7}}{4},\ \frac{3}{4}\right)$이고 원점과 점 A를 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{3}{\sqrt{7}}x$, 즉 $3x-\sqrt{7}y=0$

일품 BOX

반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 넓이는 2π이다.

원의 중심에서 현에 그은 수선은 현을 이등분하므로 $\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}$

점 B의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{7}}{4},\ -\frac{3}{4}\right)$

점 $(n+2,\ 0)$과 이 직선 사이의 거리는 원 O'의 반지름의 길이 n과 같으므로

$$\frac{|3(n+2)|}{\sqrt{3^2+(-\sqrt{7})^2}}=n, \qquad 3n+6=4n$$

$\therefore n=6$ 답 6

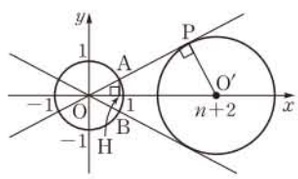
일품 BOX: $n+2>0$

다른 풀이 다음 그림에서 $\triangle AOH \backsim \triangle O'OP$이므로

$\overline{OA}:\overline{OO'}=\overline{AH}:\overline{O'P}$

$1:(n+2)=\frac{3}{4}:n$

$n=\frac{3}{4}(n+2) \qquad \therefore n=6$



14 원 $x^2+(y+a)^2=20$의 중심의 좌표는 $(0,\ -a)$, 반지름의 길이는 $2\sqrt{5}$이다.

(i) 점 $(0,\ -a)$와 직선 $x-2y-7=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2a-7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|2a-7|}{\sqrt{5}}$$

이므로 원과 직선 $x-2y-7=0$이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|2a-7|}{\sqrt{5}}<2\sqrt{5}$$

$|2a-7|<10$

$-10<2a-7<10$

$\therefore -\frac{3}{2}<a<\frac{17}{2}$ ⋯ ❶

(ii) 점 $(0,\ -a)$와 직선 $2x-y-14=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|a-14|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|a-14|}{\sqrt{5}}$$

이므로 원과 직선 $2x-y-14=0$이 만나지 않으려면

$$\frac{|a-14|}{\sqrt{5}}>2\sqrt{5}$$

$|a-14|>10$

$a-14<-10$ 또는 $a-14>10$

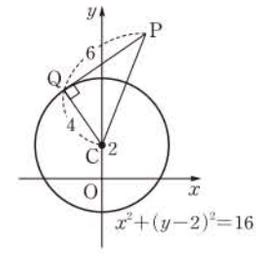
$\therefore a<4$ 또는 $a>24$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 $-\frac{3}{2}<a<4$이므로 조건을 만족시키는 정수 a는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 5개이다. ⋯ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 원과 직선 $x-2y-7=0$이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ 원과 직선 $2x-y-14=0$이 만나지 않도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	20 %

15 오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+(y-2)^2=16$의 중심을 C라 하고, 점 P에서 원에 그은 접선의 접점을 Q라 하자. 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 직각삼각형 PQC에서



$x^2+(y-2)^2=6^2+4^2$

일품 BOX: $\overline{PC}^2=\overline{PQ}^2+\overline{QC}^2$

$\therefore x^2+(y-2)^2=52$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 $(0,\ 2)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{52}$인 원이므로 구하는 넓이는

52π 답 52π

16 원의 중심 $(0,\ 0)$과 접선 $4x+3y-15=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-15|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3$$

이므로 원의 반지름의 길이는 3이고, 원의 방정식은 $x^2+y^2=9$이다. ⋯ ❶

원 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=9 \qquad \therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{9}{b}$

이 방정식이 $4x+3y=15$, 즉 $y=-\frac{4}{3}x+5$와 같으므로

$-\frac{a}{b}=-\frac{4}{3},\ \frac{9}{b}=5$

$\therefore a=\frac{12}{5},\ b=\frac{9}{5}$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=\frac{21}{5}$ ⋯ ❸

답 $\frac{21}{5}$

채점 기준	비율
❶ 중심이 원점이고 직선 $4x+3y=15$에 접하는 원의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

17 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(3,\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $3x+y=10$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.

원 $x^2+y^2=10$의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이므로 기울기가 $\frac{1}{3}$인 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{3}x\pm\sqrt{10}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+1}$$

$\therefore y=\frac{1}{3}x\pm\frac{10}{3}$

이때 이 직선이 원과 제2사분면에서 접해야 하므로

일품 BOX: 접선의 방정식이 $y=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}$이면 원과 제4사분면에서 접한다.

$y=\frac{1}{3}x+\frac{10}{3} \qquad \therefore -\frac{x}{10}+\frac{3}{10}y=1$

따라서 $a=-10$, $b=\frac{10}{3}$이므로

$a+b=-\frac{20}{3}$ 답 ②

18 원 위의 점 $P(a, b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=36$

이므로 두 점 A, B의 좌표는 각각

$\left(\frac{36}{a}, 0\right)$, $\left(0, \frac{36}{b}\right)$ ··· ❶

$\overline{AB}=12$이므로 $\sqrt{\left(-\frac{36}{a}\right)^2+\left(\frac{36}{b}\right)^2}=12$

$\left(-\frac{36}{a}\right)^2+\left(\frac{36}{b}\right)^2=144$, $\frac{9}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1$

$\therefore 9(a^2+b^2)=a^2b^2$ ····· ㉠

이때 점 $P(a, b)$가 원 $x^2+y^2=36$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=36$ ····· ㉡ ··· ❷

따라서 ㉡을 ㉠에 대입하면

$9\cdot 36=a^2b^2$, $(ab)^2=(3\cdot 6)^2$

$\therefore ab=18$ ($\because ab>0$) ··· ❸

답 18

채점 기준	비율
❶ 두 점 A, B의 좌표를 a, b를 사용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a, b에 대한 두 식을 세울 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	30 %

19 두 원 O, O'의 중심을 각각 O, O′이라 하면

$O(0, 0)$, $O'(b, 0)$

점 O와 직선 $2x+\sqrt{5}y+a=0$ 사이의 거리는 원 O의 반지름의 길이인 2와 같으므로

$\frac{|a|}{\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}}=2$, $|a|=6$

$\therefore a=6$ ($\because a>0$)

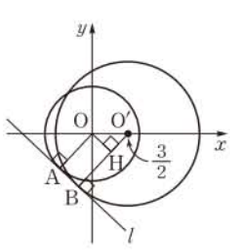
또 점 O′과 직선 $2x+\sqrt{5}y+6=0$ 사이의 거리는 원 O'의 반지름의 길이인 3과 같으므로

$\frac{|2b+6|}{\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}}=3$, $|2b+6|=9$

$\therefore b=\frac{3}{2}$ ($\because b>0$)

$\therefore \overline{OO'}=\frac{3}{2}$

오른쪽 그림과 같이 점 O에서 선분 O′B에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{O'H}=3-2=1$

직각삼각형 OHO′에서

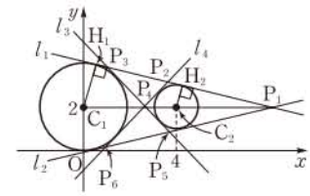
$\overline{AB}=\overline{OH}$

$=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

답 ④

일품 BOX

20 다음 그림과 같이 두 원 C_1, C_2에 모두 접하는 직선은 l_1, l_2, l_3, l_4가 있다.



따라서 l_1, l_2, l_3, l_4 중 두 직선을 l, m이라 하면 두 직선 l, m의 교점은 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6의 6개가 존재하고, 선분 OP의 길이가 최대일 때는 위의 그림에서 점 P가 접선 l_1, l_2의 교점인 P_1일 때이다.

두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 C_1, C_2라 하고 두 점 C_1, C_2에서 직선 l_1에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 $\triangle C_1H_1P_1 \backsim \triangle C_2H_2P_1$이고 그 닮음비는 $2:1$이다.

두 원에 동시에 접하는 두 직선 l_1, l_2의 교점이 P_1이므로 점 C_2는 $\overline{C_1P_1}$ 위의 점이다.

$\overline{C_1P_1}=2\overline{C_1C_2}$이고 $\overline{C_1C_2}=4$이므로 $\overline{C_1P_1}=8$

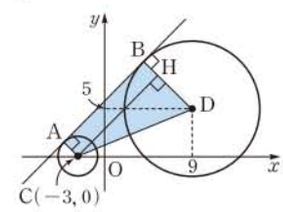
직각삼각형 C_1OP_1에서

$\overline{OP_1}=\sqrt{8^2+2^2}=2\sqrt{17}$ 답 ①

21 두 원의 중심은 각각 $C(-3, 0)$, $D(9, 5)$이므로

$\overline{CD}=\sqrt{(9+3)^2+5^2}=13$

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{DH}=7-2=5$

직각삼각형 CDH에서

$\overline{AB}=\overline{CH}$

$=\sqrt{13^2-5^2}=12$

따라서 사각형 ACDB의 넓이는

사각형 ACDB는 사다리꼴이다.

$\frac{1}{2}\cdot(7+2)\cdot 12=54$ 답 54

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 106쪽

01 원 C_1: $x^2+y^2=10$ 위의 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점은 $(1, 3)$, $(3, 1)$의 2개이다.

(i) 점 P의 좌표가 $(1, 3)$일 때,

점 $(1, 3)$과 원 C_2의 중심 $(11, 7)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(11-1)^2+(7-3)^2}=2\sqrt{29}$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$2\sqrt{29}-3\le \overline{PQ} \le 2\sqrt{29}+3$

$25<29<\frac{121}{4}$에서

$5<\sqrt{29}<\frac{11}{2}$

$\therefore 10<2\sqrt{29}<11$

$\therefore 7.\times\times\times \le \overline{PQ} \le 13.\times\times\times$

$\overline{PQ}$의 길이는 자연수이므로 8, 9, 10, 11, 12, 13의 6개이고 점 Q는 각 길이마다 2개씩 있으므로 순서쌍 (P, Q)의 개수는

$6\cdot 2=12$

(ii) 점 P의 좌표가 (3, 1)일 때,

점 (3, 1)과 원 C_2의 중심 (11, 7) 사이의 거리는

$\sqrt{(11-3)^2+(7-1)^2}=10$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$10-3\le\overline{PQ}\le10+3$

$\therefore 7\le\overline{PQ}\le13$

$\overline{PQ}$의 길이는 자연수이므로 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13의 7개이다.

이때 $\overline{PQ}$의 길이가 7, 13인 점 Q는 각각 1개이고, $\overline{PQ}$의 길이가 8, 9, 10, 11, 12인 점 Q는 각 길이마다 2개씩 있으므로 순서쌍 (P, Q)의 개수는

$2+5\cdot2=12$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (P, Q)의 개수는

$12+12=24$ 답 ③

점 P(3, 1)과 원 C_2의 중심 (11, 7)을 이은 직선이 원 C_2와 만나는 두 점이 각각 $\overline{PQ}$의 길이가 7, 13인 점 Q이다.

02 $x^2+y^2+ax+by-2=0$에서

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+2$

이므로 원의 중심의 좌표는 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+2}$이다.

ㄱ. $\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+2}\ge\sqrt{2}>1$

이므로 반지름의 길이가 1인 원은 존재하지 않는다.

실수 a, b에 대하여 $a^2\ge0$, $b^2\ge0$이므로 $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+2\ge2$

ㄴ. 원이 y축에 접하려면

$\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+2}=\left|-\frac{a}{2}\right|$

$\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+2=\frac{a^2}{4}$

$\frac{b^2}{4}+2=0 \qquad \therefore b^2=-8$

이것을 만족시키는 실수 b는 존재하지 않으므로 원은 y축에 접하지 않는다.

ㄷ. 원과 x축의 교점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2+ax-2=0$의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=-2$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=a^2+8\ge8$

따라서 $|\alpha-\beta|\ge2\sqrt{2}$이므로 원이 x축과 만나서 생기는 현의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{2}$이다.

원과 x축의 교점의 x좌표는 원의 방정식에서 $y=0$일 때의 x의 값이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

03 원 O: $x^2+y^2=a$의 중심 O(0, 0)과 두 직선 l_1: $2x+y-8=0$, l_2: $x-2y+6=0$ 사이의 거리는 각각

$\frac{|-8|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{5}}$, $\frac{|6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$

이고 두 직선 l_1, l_2의 교점의 좌표는 (2, 4)이다.

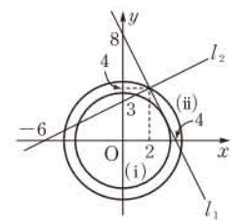
두 방정식 $2x+y-8=0$, $x-2y+6=0$을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=4$

(i) 원 O가 직선 l_1과 접할 때,

아래 그림과 같이 $a=\left(\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{64}{5}$일 때, 원 O는 직선 l_1과 한 점에서, 직선 l_2와 두 점에서 만난다.

(ii) 원 O가 점 (2, 4)를 지날 때,

아래 그림과 같이 $a=(\sqrt{2^2+4^2})^2=20$일 때, 원 O는 두 직선 l_1, l_2와 점 (2, 4)에서 동시에 만나고 각각 다른 한 점에서 또 만난다.



(i), (ii)에서 구하는 모든 양수 a의 값의 곱은

$\frac{64}{5}\cdot20=256$ 답 256

04 점 Q는 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$과 직선 $y=\frac{3}{4}x$의 접점이므로

$x^2+\left(\frac{3}{4}x\right)^2+4x-2\cdot\frac{3}{4}x+1=0$

$25x^2+40x+16=0, \qquad (5x+4)^2=0$

$\therefore x=-\frac{4}{5}$

따라서 점 Q의 좌표는 $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$이므로

$x=-\frac{4}{5}$를 $y=\frac{3}{4}x$에 대입하면 $y=\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{3}{5}$

$\overline{PQ}=\sqrt{\left(-\frac{4}{5}-4\right)^2+\left(-\frac{3}{5}-3\right)^2}=6$ 답 6

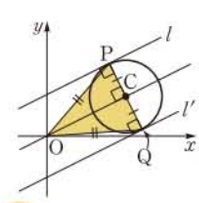
다른 풀이 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$의 중심을 C라 하면 C(−2, 1)이므로

$\overline{CP}=\sqrt{(4+2)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{10}$

이때 $\overline{CQ}=2$이므로 직각삼각형 CQP에서

$\overline{PQ}=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-2^2}=6$

05 원 C의 중심을 점 C(a, b)라 하면 평행한 두 직선 l, l'이 원 C의 접선이므로 선분 PQ는 원 C의 지름이고 점 C는 선분 PQ의 중점이다.



삼각형 POQ는 $\overline{OP}=\overline{OQ}$인 이등변삼각형이므로 직선 OC가 선분 PQ를 수직이등분한다.

이등변삼각형의 꼭지각의 꼭짓점과 밑변의 중점을 지나는 직선은 밑변의 수직이등분선과 같다.

즉 직선 OC는 직선 l과 평행하고 원점을 지나므로 직선의 방정식은

$x-2y=0$

점 C(a, b)가 직선 $x-2y=0$ 위의 점이므로

$a-2b=0$ …… ㉠

또 원 C의 반지름의 길이는 원점 O와 직선 $x-2y+4\sqrt{5}=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|4\sqrt{5}|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=4$$

삼각형 POQ의 넓이가 40이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot \overline{OC}=40$$

$$\therefore \overline{OC}=10$$

일품 BOX: $\overline{PQ}=2\overline{PC}=2\times(\text{원}C\text{의 반지름의 길이})=2\cdot 4=8$

그런데 두 점 O, C 사이의 거리는 $\sqrt{a^2+b^2}$이므로

$$\sqrt{a^2+b^2}=10$$

$$\therefore a^2+b^2=100 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $a=2b$이고 이것을 ㉡에 대입하면

$$(2b)^2+b^2=100, \quad b^2=20$$

$$\therefore b=2\sqrt{5}\ (\because b>0)$$

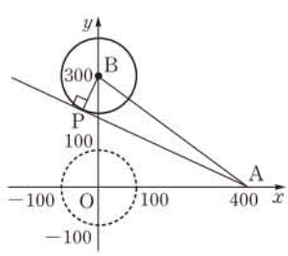
따라서 $a=4\sqrt{5}$이므로

$$a+b=6\sqrt{5}$$

답 ④

06 태풍의 눈의 처음 위치를 O라 하고 1시간 30분 후의 태풍의 눈의 위치를 B, 헬기의 처음 위치를 A라 하자.

오른쪽 그림과 같이 점 O를 원점으로 하고 두 직선 OA, OB를 각각 x축, y축으로 하는 좌표평면을 잡고, 1 km를 1로 생각하면



A(400, 0),

B(0, 300)

태풍의 눈이 시속 200 km의 속력으로 1시간 30분 동안 이동한 거리는 $200\cdot\frac{3}{2}=300\,(\text{km})$

1시간 30분 후의 태풍의 영향권의 경계선을 나타내는 방정식은

$$x^2+(y-300)^2=100^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

태풍의 영향권은 반지름의 길이가 100 km인 원의 내부이다.

점 A에서 원 ㉠에 그은 접선의 접점을 P라 하면

$$\overline{BP}=100,\ \overline{AB}=\sqrt{400^2+300^2}=500$$

직각삼각형 BPA에서

$$\overline{AP}=\sqrt{500^2-100^2}$$
$$=200\sqrt{6}$$
$$=200\times 2.4$$
$$=480\,(\text{km})$$

즉 헬기는 점 A의 위치에서 1시간 30분 동안 480 km를 이동하였으므로 헬기의 속력은 시속 $\frac{480}{1.5}$, 즉 320 km이다.

$(\text{속력})=\frac{(\text{거리})}{(\text{시간})}$

$$\therefore a=320$$

답 320

11 도형의 이동

개념&핵심 기출

본책 108~110쪽

01 점 (0, 2)를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 −1만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(0+2,\ 2-1) \qquad \therefore (2,\ 1)$$

이때 원점을 지나는 직선 l의 방정식을 $y=mx$라 하면 이 직선이 점 (2, 1)을 지나므로

$$2m=1 \qquad \therefore m=\frac{1}{2}$$

따라서 직선 l의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}x$$

답 $y=\frac{1}{2}x$

02 점 (1, 1)을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 −4만큼 평행이동하면 점 (2, −3)으로 옮겨지므로 점 $(a,\ b)$를 이 평행이동에 의하여 옮긴 점의 좌표는 $(a+1,\ b-4)$이다.

x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동했다고 하면 $1+m=2,\ 1+n=-3$ $\therefore m=1,\ n=-4$

따라서 $a+1=-3,\ b-4=6$이므로

$$a=-4,\ b=10$$
$$\therefore a+b=6$$

답 ⑤

03 △ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5+a}{3},\ \frac{3+b+7}{3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+4}{3},\ \frac{b+10}{3}\right)$$

이때 주어진 평행이동에 의하여 △ABC의 무게중심이 원점으로 옮겨지므로

$$\frac{a+4}{3}-2=0,\ \frac{b+10}{3}-3=0$$

따라서 $a=2,\ b=-1$이므로

$$a+b=1$$

답 ①

04 직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 −1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y+1=a(x-2)+b$$
$$\therefore y=ax-2a+b-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 직선 $y=-2x+1$과 y축 위에서 수직으로 만나므로 직선 ㉠의 기울기는 $\frac{1}{2}$이고, y절편은 1이다.

수직인 두 직선의 기울기의 곱은 −1이므로 $-2\cdot a=-1$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{2},\ -2a+b-1=1$이므로

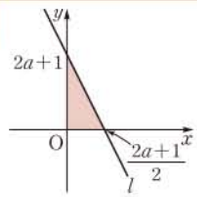
$$a=\frac{1}{2},\ b=3 \qquad \therefore ab=\frac{3}{2}$$

답 ③

05 직선 $2x+y-2=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 −1만큼 평행이동한 직선 l의 방정식은

$$2(x-a)+(y+1)-2=0$$
$$\therefore 2x+y-(2a+1)=0$$

직선 l의 x절편은 $\frac{2a+1}{2}$, y절편은 $2a+1$이므로 오른쪽 그림에서 직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2a+1}{2}\cdot(2a+1)$$
$$=\frac{(2a+1)^2}{4}$$

따라서 $\frac{(2a+1)^2}{4}=25$이므로

$(2a+1)^2=100,\quad 2a+1=\pm10$

$\therefore a=\frac{9}{2}\ (\because a>0)$ 답 ②

일품 BOX

구하는 a의 값은 양수이므로

$\frac{2a+1}{2}>0,$

$2a+1>0$

06 포물선 $y=x^2-2x$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-n=(x-m)^2-2(x-m)$

$\therefore y=x^2-2(m+1)x+m^2+2m+n$

이 포물선이 $y=x^2-10x+20$과 일치하므로

$2(m+1)=10$에서

$m+1=5\quad \therefore m=4$

$m^2+2m+n=20$에서

$4^2+2\cdot4+n=20$

$\therefore n=-4$

직선 $x-2y+a=0$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 직선 l의 방정식은

$(x-4)-2(y+4)+a=0$

$\therefore x-2y-12+a=0$

직선 l이 원점을 지나므로 $\quad -12+a=0$

$\therefore a=12$ 답 12

다른 풀이 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$,

$y=x^2-10x+20=(x-5)^2-5$이므로 주어진 평행이동은 점 $(1,\ -1)$을 점 $(5,\ -5)$로 옮기는 평행이동, 즉 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

포물선의 평행이동은 포물선의 꼭짓점의 평행이동으로 생각할 수 있다.

07 원 $x^2+y^2+10x-8y+25=0$에서

$(x+5)^2+(y-4)^2=16\quad\cdots\cdots$ ㉠

원 $x^2+y^2+10y+c=0$에서

$x^2+(y+5)^2=25-c\quad\cdots\cdots$ ㉡

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(-5,\ 4)$, $(0,\ -5)$이므로 원 ㉠을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -9만큼 평행이동하면 원 ㉡과 겹쳐진다.

$\therefore a=5,\ b=-9$

또 원을 평행이동하여도 원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로 ㉠, ㉡에서

$16=25-c\quad \therefore c=9$

$\therefore a+b+c=5$ 답 5

원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동으로 생각할 수 있다.

08 원 $x^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a)^2+y^2=4$

이 원이 직선 $3x-4y-2=0$에 접하면 원의 중심 $(a,\ 0)$과 직선 $3x-4y-2=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2와 같으므로

$\frac{|3a-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$

$|3a-2|=10,\quad 3a-2=\pm10$

$\therefore a=4\ (\because a>0)$ 답 ③

원과 직선의 위치 관계

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 할 때

① 원과 직선이 두 점에서 만나면 ➡ $d<r$

② 원과 직선이 접하면 ➡ $d=r$

③ 원과 직선이 만나지 않으면 ➡ $d>r$

09 $x^2+y^2+6x-2y+a=0$에서

$(x+3)^2+(y-1)^2=10-a$

이 원을 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 $-2b$만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-b+3)^2+(y+2b-1)^2=10-a$

이므로 이 원은 중심이 점 $(b-3,\ -2b+1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10-a}$인 원이다.

이 원이 x축, y축에 동시에 접하고 원의 중심이 제2사분면 위에 있으므로

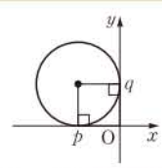
$-(b-3)=-2b+1\quad \therefore b=-2$

즉 평행이동한 원의 중심의 좌표는 $(-5,\ 5)$이므로 반지름의 길이는 5이다.

따라서 $\sqrt{10-a}=5$에서

$10-a=25\quad \therefore a=-15$

$\therefore b-a=13$ 답 ③



x축, y축에 동시에 접하고 원의 중심 $(p,\ q)$가 제2사분면 위에 있으면

$|p|=q\quad \therefore -p=q$

10 점 $(a-2,\ b+6)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a-2,\ -b-6)$

이 점을 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-b-6,\ a-2)$

점 $(-b-6,\ a-2)$가 제2사분면 위에 있으므로

$-b-6<0,\ a-2>0$

$\therefore a>2,\ b>-6$

따라서 두 정수 a, b에 대하여 $a+b$의 최솟값은 $a=3$, $b=-5$일 때 $\quad 3+(-5)=-2$ 답 -2

11 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$일 때, 점 P_n의 좌표를 차례대로 구하면 다음과 같다.

$P_1(3,\ 2),\ P_2(3,\ -2),\ P_3(-3,\ 2),$

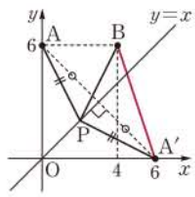
$P_4(-3,\ -2),\ P_5(3,\ 2),\ P_6(3,\ -2),$

$P_7(-3,\ 2),\ P_8(-3,\ -2),\ \cdots$

즉 점 P_n의 좌표는 $(3,\ 2)$, $(3,\ -2)$, $(-3,\ 2)$, $(-3,\ -2)$가 차례대로 반복됨을 알 수 있다.

따라서 $49=4\cdot12+1$에서 점 P_{49}는 점 P_1과 일치하므로 점 P_{49}의 좌표는 $(3,\ 2)$이다. 답 ⑤

12 오른쪽 그림과 같이 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 A′$(6,\ 0)$이므로



$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$$
$$\geq\overline{A'B}$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은

$$\overline{A'B}=\sqrt{(4-6)^2+6^2}=2\sqrt{10}$$

답 ⑤

13 점 $(-1,\ 0)$을 지나는 직선의 기울기를 m이라 하면 $\quad y=m(x+1)$

이 직선을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$$y=m(x+1)+1$$

이 직선을 다시 x축에 대하여 대칭이동하면

$$-y=m(x+1)+1 \qquad \therefore y=-m(x+1)-1$$

이 직선이 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$$3=-2m-1 \qquad \therefore m=-2$$

답 -2

14 직선 $(2k+1)x+(k+1)y-4=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$(2k+1)(-x)+(k+1)(-y)-4=0$$
$$\therefore (2k+1)x+(k+1)y+4=0$$

k에 대하여 정리하면

$$(2x+y)k+(x+y+4)=0$$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$2x+y=0,\ x+y+4=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=4,\ y=-8$$

따라서 이 직선은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(4,\ -8)$을 지나므로 $\quad a=4,\ b=-8$

$$\therefore a-2b=4-2\cdot(-8)=20$$

답 ⑤

15 원 C_1의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$$a=b$$

즉 원 C_1: $x^2+y^2+ax+ay=0$에서

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$이므로 원 C_1을 원점에 대하여 대칭이동한 원 C_2의 방정식은

$$\left(-x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(-y+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$$
$$\therefore \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$$

일품 BOX

원의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 중심의 x좌표와 y좌표가 같다. 따라서 주어진 원의 방정식에서 x항과 y항의 계수가 서로 같다.

즉 두 원 C_1, C_2의 중심의 좌표는 각각 $\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)$이고, 두 원의 중심 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$이므로

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)^2}=2\sqrt{2}, \qquad \sqrt{2a^2}=2\sqrt{2}$$
$$a^2=4 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$$
$$\therefore a+b=2a=4$$

답 4

16 점 A의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 직선 AB는 직선 $2x-y-2=0$, 즉 $y=2x-2$와 수직이므로

$$\frac{2-b}{-1-a}=-\frac{1}{2}$$
$$\therefore a+2b-3=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

두 점 A$(a,\ b)$, B$(-1,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기

또 선분 AB의 중점 $\left(\frac{a-1}{2},\ \frac{b+2}{2}\right)$는 직선 $2x-y-2=0$ 위의 점이므로

$$2\cdot\frac{a-1}{2}-\frac{b+2}{2}-2=0$$
$$\therefore 2a-b-8=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=\frac{19}{5},\ b=-\frac{2}{5}$$

따라서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{19}{5},\ -\frac{2}{5}\right)$이다.

답 $\left(\frac{19}{5},\ -\frac{2}{5}\right)$

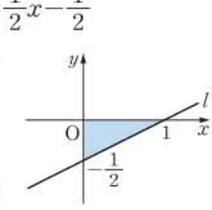
17 직선 AB의 기울기는 $\frac{-1-3}{4-2}=-2$이고 직선 AB와 직선 l은 서로 수직이므로 직선 l의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

또 직선 l은 선분 AB의 중점 $(3,\ 1)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{3-1}{2}\right)$

$$y-1=\frac{1}{2}(x-3) \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$

따라서 오른쪽 그림에서 직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

답 ①

18 원 $(x+4)^2+(y-2)^2=1$의 중심 C$(-4,\ 2)$를 직선 $y=3x+4$에 대하여 대칭이동한 점을 D$(a,\ b)$라 하면 직선 CD는 직선 $y=3x+4$와 수직이므로

$$\frac{b-2}{a+4}=-\frac{1}{3}$$
$$\therefore a+3b=2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 선분 CD의 중점 $\left(\frac{a-4}{2},\ \frac{b+2}{2}\right)$는 직선 $y=3x+4$ 위의 점이므로

$\frac{b+2}{2}=3\cdot\frac{a-4}{2}+4$

$\therefore 3a-b=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=0$

따라서 원 $(x+4)^2+(y-2)^2=1$을 직선 $y=3x+4$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-2)^2+y^2=1$

이고, 이것을 다시 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-2)^2+y^2=1$

$\therefore (x+2)^2+y^2=1$ 답 ①

원을 직선에 대하여 대칭이동하여도 원의 반지름의 길이는 변하지 않는다.

1등급을 위한 고난도 문제

본책 111~113쪽

01 점 $(1,\ -1)$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 점 $(-2,\ 3)$으로 옮겨진다. 이 평행이동에 의하여 점 $A(a,\ b)$가 점 $A'(2,\ 1)$로 옮겨지므로

$a-3=2,\ b+4=1$

$\therefore a=5,\ b=-3$

또 점 $B(2,\ 1)$이 점 $B'(c,\ d)$로 옮겨지므로

$2-3=c,\ 1+4=d$

$\therefore c=-1,\ d=5$

따라서 $A(5,\ -3)$, $B'(-1,\ 5)$이므로

$\overline{AB'}=\sqrt{(-1-5)^2+(5+3)^2}=10$ 답 ⑤

02 점 $(-3,\ 4)$를 평행이동

$(x,\ y)\longrightarrow(x+a,\ y-2)$에 의하여 이동한 점의 좌표는 $(-3+a,\ 2)$ ··· ❶

이 점을 다시 평행이동 $(x,\ y)\longrightarrow(x-2,\ y+a)$에 의하여 이동한 점의 좌표는

$(-5+a,\ 2+a)$ ··· ❷

따라서 $-5+a=3,\ 2+a=b$이므로

$a=8,\ b=10$ ··· ❸

$\therefore a+b=18$ ··· ❹

답 18

채점 기준	비율
❶ 점 $(-3,\ 4)$를 평행이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ ❶에서 구한 점을 평행이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

03 주어진 평행이동에 의하여 점 $A(3,\ 1)$이 옮겨지는 점 B의 좌표는

$(3+m,\ 1+n)$

이때 $\overline{AB}=3\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(3+m-3)^2+(1+n-1)^2}=3\sqrt{2}$

$\therefore m^2+n^2=18$

또 점 B에서 직선 $x+y-4=0$에 이르는 거리가 $2\sqrt{2}$이므로

$\frac{|3+m+1+n-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$

$\therefore |m+n|=4$

따라서 $m^2+n^2=(m+n)^2-2mn$에서

$(m+n)^2=|m+n|^2$

$18=16-2mn$

$\therefore mn=-1$ 답 ②

04 점 P가 원점에서 출발하여 x축의 방향으로 a번, y축의 방향으로 b번 이동하였다고 하면 점 P의 좌표는 $(a,\ b)$이고, $n=a+b$이다.

점 $P(a,\ b)$가 원 $(x-6)^2+(y-8)^2=8$ 위에 있으므로

$(a-6)^2+(b-8)^2=8$

이때 $a,\ b$는 자연수이므로

$(a-6)^2=4,\ (b-8)^2=4$

$a-6=\pm2,\ b-8=\pm2$

$\therefore a=8$ 또는 $a=4,\ b=10$ 또는 $b=6$

즉 원 $(x-6)^2+(y-8)^2=8$ 위에 놓일 수 있는 점 P는 $(4,\ 6)$, $(4,\ 10)$, $(8,\ 6)$, $(8,\ 10)$이므로 서로 다른 n의 값은

$10,\ 14,\ 18$

$4+6=10,\ 4+10=14,$
$8+6=14,\ 8+10=18$

따라서 구하는 n의 값의 합은

$10+14+18=42$ 답 42

05 직선 $x+2y+4=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $2a-1$만큼 평행이동한 직선 m의 방정식은

$(x-a)+2(y-2a+1)+4=0$

$\therefore x+2y-5a+6=0$

직선 $x+2y+4=0$ 위의 점 $(-4,\ 0)$과 직선 m 사이의 거리가 $4\sqrt{5}$이므로

$\frac{|-4-5a+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=4\sqrt{5},\qquad |-5a+2|=20$

$-5a+2=\pm20$

$\therefore a=\frac{22}{5}\ (\because a>0)$ 답 ④

06 직선 $2x+3y-7=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$2(x-a)+3(y-b)-7=0$

$\therefore 2x+3y-2a-3b-7=0$ ··· ❶

이 직선이 마름모 PQRS의 넓이를 이등분하므로 마름모의 두 대각선의 교점 $(4,\ 3)$을 지난다. ⋯ ❷

따라서 $8+9-2a-3b-7=0$이므로

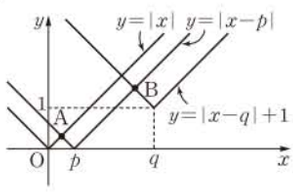
$2a+3b=10$ ⋯ ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ 직선 $2x+3y-7=0$을 평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ ❶에서 구한 직선이 지나는 점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ $2a+3b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

07 $y=|x|$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=|x-p|$이고, x축의 방향으로 q만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=|x-q|+1$이다.

이때 $0<p<q$이므로 두 교점 A, B가 존재하려면 $y=|x|$, $y=|x-p|$, $y=|x-q|+1$의 그래프는 위의 그림과 같아야 한다.



(i) 점 A는 두 직선 $y=x$, $y=-x+p$의 교점이므로 $x=-x+p$에서

$2x=p \qquad \therefore x=\frac{p}{2}$

따라서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{p}{2},\ \frac{p}{2}\right)$

(ii) 점 B는 두 직선 $y=x-p$, $y=-x+q+1$의 교점이므로 $x-p=-x+q+1$에서

$2x=p+q+1 \qquad \therefore x=\frac{p+q+1}{2}$

따라서 점 B의 좌표는

$\left(\frac{p+q+1}{2},\ \frac{-p+q+1}{2}\right)$

(i), (ii)에서 선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(\frac{2p+q+1}{4},\ \frac{q+1}{4}\right)$이므로

$\frac{2p+q+1}{4}=2,\ \frac{q+1}{4}=\frac{9}{8}$

$\therefore p=\frac{7}{4},\ q=\frac{7}{2}$

$\therefore \frac{q}{p}=\frac{7}{2}\cdot\frac{4}{7}=2$

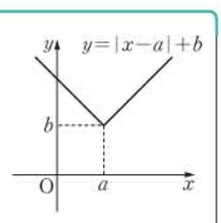
답 2

1등급 비밀노트

$y=|x-a|+b$

$=\begin{cases}-x+a+b & (x<a)\\ x-a+b & (x\ge a)\end{cases}$

이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x=a$인 점에서 꺾인 모양이고, $y=|x-a|+b$는 $x=a$일 때 최솟값 b를 갖는다.



일품 BOX

마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로 두 대각선의 교점은 $\overline{PR}$의 중점 $\left(\frac{2+6}{2},\ \frac{3+3}{2}\right)$, 즉 $(4,\ 3)$이다.

$y=|x|$
$=\begin{cases}-x & (x<0)\\ x & (x\ge 0)\end{cases}$

$y=|x-p|$
$=\begin{cases}-x+p & (x<p)\\ x-p & (x\ge p)\end{cases}$
$y=|x-q|+1$
$=\begin{cases}-x+q+1 & (x<q)\\ x-q+1 & (x\ge q)\end{cases}$

$\frac{1}{2}\left(\frac{p}{2}+\frac{p+q+1}{2}\right)$
$=\frac{2p+q+1}{4}$,
$\frac{1}{2}\left(\frac{p}{2}+\frac{-p+q+1}{2}\right)$
$=\frac{q+1}{4}$

두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이의 합

08 $x^2+y^2+ax+by+1=0$에서

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-1$

원의 중심 $\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{b}{2}\right)$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$\left(-\frac{a}{2}+2,\ -\frac{b}{2}-3\right)$ ⋯ ❶

따라서 $-\frac{a}{2}+2=1,\ -\frac{b}{2}-3=-1$이므로

$a=2,\ b=-4$ ⋯ ❷

이때 원을 평행이동하여도 반지름의 길이는 변하지 않으므로

$r=\sqrt{\frac{2^2}{4}+\frac{(-4)^2}{4}-1}=2$ ⋯ ❸

$\therefore a+b+r=0$ ⋯ ❹

답 0

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 원의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ r의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b+r$의 값을 구할 수 있다.	10 %

09 원 $x^2+(y-1)^2=4$의 중심 $(0,\ 1)$이 원 $(x-1)^2+y^2=4$의 중심 $(1,\ 0)$으로 옮겨지므로 주어진 평행이동은

$(x,\ y) \longrightarrow (x+1,\ y-1)$ ⋯ ❶

이 평행이동에 의하여 직선 $x+2y-4=0$이 옮겨지는 직선의 방정식은

$(x-1)+2(y+1)-4=0$

$\therefore x+2y-3=0$ ⋯ ❷

따라서 $a=2,\ b=-3$이므로

$a+b=-1$ ⋯ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 주어진 평행이동을 구할 수 있다.	40 %
❷ 직선 $x+2y-4=0$이 옮겨지는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

10 원 C_1의 방정식은 $(x-2)^2+y^2=1$

원 C_2의 방정식은 $x^2+(y-2)^2=1$

두 원 C_1, C_2의 중심의 좌표가 각각 $(2,\ 0)$, $(0,\ 2)$이므로 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

따라서 구하는 최댓값은

$2\sqrt{2}+1+1=2\sqrt{2}+2$

답 ④

11 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 P와 원점에 대하여 대칭인 점 Q의 좌표는

$(-a,\ -b)$

이때 두 점 $P(a,\ b)$, $Q(-a,\ -b)$는 모두 포물선 $y=x^2-3x-4$ 위의 점이므로

$b=a^2-3a-4,\ -b=a^2+3a-4$ ··· ❶

즉 $a^2-3a-4=-a^2-3a+4$이므로

$a^2=4 \qquad \therefore a=\pm 2$

따라서

$a=-2,\ b=6$ 또는 $a=2,\ b=-6$

이므로

$P(-2,\ 6),\ Q(2,\ -6)$

또는 $P(2,\ -6),\ Q(-2,\ 6)$ ··· ❷

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(-2-2)^2+(6+6)^2}$

$=4\sqrt{10}$ ··· ❸

답 $4\sqrt{10}$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 x좌표, y좌표 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 두 점 P, Q의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\overline{PQ}$의 길이를 구할 수 있다.	20 %

$a=-2,\ a=2$를 $b=a^2-3a-4$에 각각 대입하여 b의 값을 구한다.

12 점 $(a,\ b)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(a,\ -b)$

이 점을 다시 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(b,\ -a)$

이 점이 제2사분면 위의 점 $(c,\ d)$와 일치하므로

$b<0,\ -a>0,\ b=c,\ -a=d$

$\therefore a<0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$

ㄱ. $a,\ b$는 모두 음수이다.

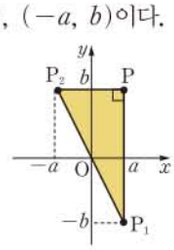
ㄴ. $a<0,\ d>0$이므로 $\quad ad<0$

ㄷ. $a+c<0,\ bd<0$이므로 점 $(a+c,\ bd)$는 제3사분면 위의 점이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ⑤

13 점 $P(a,\ b)$를 x축, y축에 대하여 각각 대칭이동한 점 P_1, P_2의 좌표는 각각 $(a,\ -b)$, $(-a,\ b)$이다.

$\triangle PP_1P_2$는 오른쪽 그림과 같으므로



$\triangle PP_1P_2=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2b$

$=2ab$

이때 $\triangle PP_1P_2$의 넓이가 8이므로

$2ab=8$

$\therefore ab=4$ ····· ㉠

또 점 $P(a,\ b)$가 직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$b=2a$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$a^2=2 \qquad \therefore a=\sqrt{2}\ (\because a>0)$

$a=\sqrt{2}$를 ㉡에 대입하면

$\therefore b=2\sqrt{2}$

$\therefore a+b=3\sqrt{2}$ 답 $3\sqrt{2}$

14 직선 $y=ax$를 x축에 대하여 대칭이동하면

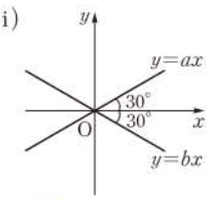
$-y=ax \qquad \therefore y=-ax$

이 직선이 직선 $y=bx$와 일치하므로

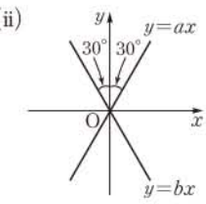
$-a=b$ ····· ㉠

이때 두 직선 $y=ax$, $y=bx$가 이루는 예각의 크기가 $60°$인 경우는 다음의 두 가지가 있다.

(i)



(ii)



직선이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기가 θ $(0°\le\theta<90°)$일 때, 직선의 기울기는 $\tan\theta$이다.

(i) $a=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 ㉠에서

$b=-\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \therefore ab=-\frac{1}{3}$

(ii) $a=\tan 60°=\sqrt{3}$이므로 ㉠에서

$b=-\sqrt{3} \qquad \therefore ab=-3$

(i), (ii)에서 ab의 최솟값은 -3이다. 답 -3

15 함수 $y=x^2+2x+k$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-1=x^2+2x+k$

$\therefore y=x^2+2x+k+1$ ··· ❶

이 그래프를 다시 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=x^2+2x+k+1$

$\therefore y=-x^2-2x-k-1$

$\therefore f(x)=-x^2-2x-k-1$

$=-(x+1)^2-k$ ··· ❷

따라서 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 $-k$를 가지므로

$-k=5 \qquad \therefore k=-5$ ··· ❸

답 -5

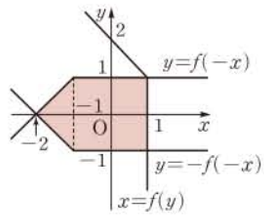
채점 기준	비율
❶ 함수 $y=x^2+2x+k$의 그래프를 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❷ ❶에서 구한 그래프를 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

16 세 함수 $y=f(-x)$, $y=-f(-x)$, $x=f(y)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 각각 y축, 원점, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 오른쪽 그림에서 세 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는

$2\cdot2+\frac{1}{2}\cdot2\cdot1=5$

답 ③



17 원 $x^2+y^2+2x-4y-5=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$x^2+y^2-2x+4y-5=0$

이 원을 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$x^2+y^2+4x-2y-5=0$

$y=0$을 이 식에 대입하면

$x^2+4x-5=0,\quad (x+5)(x-1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=1$

따라서 이 원과 x축의 교점의 좌표는 $(-5,\ 0)$, $(1,\ 0)$이므로

$\overline{AB}=|1-(-5)|=6$

답 6

일품 BOX

x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입한다.

x 대신 y, y 대신 x를 대입한다.

18 직선 l의 방정식은

$y+2=m(x-5)$

$\therefore y=mx-5m-2$ …… ㉠

직선 l 위의 점 $(x,\ y)$를 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이동한 점을 $(x',\ y')$이라 하면

$\frac{x+x'}{2}=2,\ \frac{y+y'}{2}=1$

$\therefore x=4-x',\ y=2-y'$

이것을 ㉠에 대입하면

$2-y'=m(4-x')-5m-2$

$\therefore y'=mx'+m+4$

따라서 점 $(x',\ y')$은 직선 $y=mx+m+4$ 위의 점이므로 직선 l을 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $y=mx+m+4$이다.

이 직선을 다시 x축에 대하여 대칭이동한 직선 l'의 방정식은

$-y=mx+m+4$

$\therefore y=-mx-m-4$

(i) 직선 l'이 점 $A(5,\ -2)$를 지나려면

$-2=-5m-m-4\qquad \therefore m=-\frac{1}{3}$

(ii) 두 직선 l, l'이 서로 수직이려면

$m\cdot(-m)=-1$

$m^2=1\qquad \therefore m=-1\ (\because m<0)$

(i), (ii)에서 $p=-\frac{1}{3}$, $q=-1$이므로

$p+q=-\frac{4}{3}$

답 $-\frac{4}{3}$

두 점 $(x,\ y)$, $(x',\ y')$이 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이므로 두 점을 잇는 선분의 중점의 좌표는 $(2,\ 1)$이다.

19 직선 $2x+y+1=0$ 위의 점 $P(x,\ y)$를 직선 $x+y-3=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x',\ y')$이라 하면 직선 PP'은 직선 $x+y-3=0$, 즉 $y=-x+3$과 수직이므로

$\frac{y'-y}{x'-x}=1$

$\therefore x-y=x'-y'$ …… ㉠

또 선분 PP'의 중점 $\left(\frac{x+x'}{2},\ \frac{y+y'}{2}\right)$은 직선 $x+y-3=0$ 위의 점이므로

$\frac{x+x'}{2}+\frac{y+y'}{2}-3=0$

$\therefore x+y=-x'-y'+6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=-y'+3,\ y=-x'+3$

이것을 $2x+y+1=0$에 대입하면

$2(-y'+3)+(-x'+3)+1=0$

$\therefore x'+2y'-10=0$

이때 점 $P'(x',\ y')$은 직선 $x+2y-10=0$ 위의 점이므로 직선 $2x+y+1=0$을 직선 $x+y-3=0$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $x+2y-10=0$이다.

따라서 구하는 직선의 y절편은 5이다.

답 5

20 접는 선을 직선 l이라 하면 점 $A(1,\ 4)$를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점이 점 $(-1,\ 0)$이다.

이 직선 l의 방정식을 $y=mx+n$, 점 $(-1,\ 0)$을 B라 하면 직선 AB는 직선 $y=mx+n$과 수직이므로

$\frac{0-4}{-1-1}\cdot m=-1,\qquad 2m=-1$

$\therefore m=-\frac{1}{2}$

또 선분 AB의 중점 $\left(\frac{1-1}{2},\ \frac{4+0}{2}\right)$, 즉 $(0,\ 2)$는 직선 $y=mx+n$ 위의 점이므로

$n=2$

따라서 직선 l의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}x+2$

한편 점 $P(0,\ -3)$을 직선 l에 대하여 대칭이동한 점 $(a,\ b)$를 Q라 하면 직선 PQ는 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$와 수직이므로

$\frac{b+3}{a-0}=2,\qquad b+3=2a$

$\therefore 2a-b=3$ …… ㉠

선분 PQ의 중점 $\left(\frac{0+a}{2},\ \frac{-3+b}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{a}{2},\ \frac{b-3}{2}\right)$은 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 위의 점이므로

$\frac{b-3}{2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}+2$

$\therefore a+2b=14$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=5$

$\therefore a+b=9$

답 ②

21 점 Q의 좌표를 $(b,\ c)$라 하면 직선 PQ는 직선 $x+y=2$, 즉 $y=-x+2$와 수직이므로

$\frac{c-1}{b-a}=1$

$\therefore a-b+c=1$ …… ㉠

또 선분 PQ의 중점 $\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{1+c}{2}\right)$는 직선 $x+y=2$ 위의 점이므로

$\frac{a+b}{2}+\frac{1+c}{2}=2$

$\therefore a+b+c=3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $b=1,\ c=2-a$

$\therefore Q(1,\ 2-a)$ ··· ❶

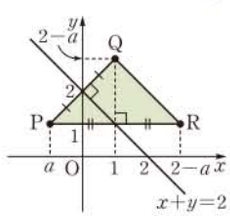
한편 점 R의 좌표를 $(d,\ e)$라 하면 선분 PR의 중점은 점 $(1,\ 1)$이므로

$\frac{a+d}{2}=1,\ \frac{1+e}{2}=1$

$\therefore d=2-a,\ e=1$

$\therefore R(2-a,\ 1)$ ··· ❷

오른쪽 그림에서 △PQR의 넓이는



$\frac{1}{2}(2-a-a)(2-a-1)$

$=(a-1)^2$

이므로 $(a-1)^2=4$

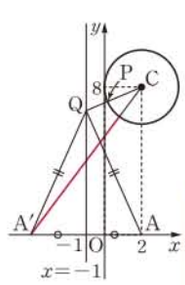
$a-1=\pm 2$

$\therefore a=-1\ (\because a<0)$ ··· ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 점 Q의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 점 R의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

22 오른쪽 그림과 같이 점 A를 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하고 원의 중심을 C라 하면



$A'(-4,\ 0),\ C(2,\ 8)$

$\overline{AQ}+\overline{QP}=\overline{A'Q}+\overline{QP}$이므로

$\overline{AQ}+\overline{QP}$의 값이 최소일 때는 선분 A′C가 직선 $x=-1$과 만나는 점이 Q, 원과 만나는 점이 P일 때이다.

$\therefore \overline{AQ}+\overline{QP}\geq \overline{A'C}-2$

$=\sqrt{(2+4)^2+8^2}-2$

$=10-2=8$

따라서 $\overline{AQ}+\overline{QP}$의 최솟값은 8이다.

답 8

23 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-r^2-(x^2+y^2-8x-6y)=0$

$\therefore 8x+6y=r^2$

$x^2+y^2-8x-6y=0$에서

$(x-4)^2+(y-3)^2=25$

원 C_2의 중심 $(4,\ 3)$을 두 원의 공통인 현에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 두 점 $(4,\ 3)$, $(a,\ b)$를 지나는 직선은 직선 $8x+6y=r^2$과 수직이므로

$\frac{b-3}{a-4}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=-1 \qquad \therefore b=\frac{3}{4}a$ …… ㉠

또 두 점을 잇는 선분의 중점 $\left(\frac{4+a}{2},\ \frac{3+b}{2}\right)$는 직선 $8x+6y=r^2$ 위의 점이므로

$8\cdot\frac{4+a}{2}+6\cdot\frac{3+b}{2}=r^2$

$\therefore 4a+3b+25=r^2$ …… ㉡

한편 점 $(a,\ b)$가 원 C_1 위의 점이므로

$a^2+b^2=r^2$ …… ㉢

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{25}{4}a+25=r^2$ …… ㉣

㉠을 ㉢에 대입하면 $\frac{25}{16}a^2=r^2$ …… ㉤

㉣, ㉤에서 $\frac{25}{16}a^2=\frac{25}{4}a+25$이므로

$a^2-4a-16=0 \qquad \therefore a=2\pm 2\sqrt{5}$

이때 $r^2<25$이므로 ㉣에서 $a<0$

$\therefore a=2-2\sqrt{5}$

이것을 ㉣에 대입하면

$r^2=\frac{25}{4}(2-2\sqrt{5})+25=\frac{75}{2}-\frac{25\sqrt{5}}{2}$

따라서 $p=\frac{75}{2},\ q=-\frac{25}{2}$이므로

$p+q=25$

답 ①

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 114쪽

01 점 P가 점 $A(7,\ 7)$에서 출발하여 이동한 점을 차례대로 나열하면

$(6,\ 7),\ (5,\ 7),\ (4,\ 7),\ (3,\ 7),\ (3,\ 6)$

따라서 점 B의 좌표는 $(3,\ 6)$이고, 점 P가 이동한 횟수는 5이다.

답 ②

일품 BOX

원의 반지름의 길이

㉡−㉠을 하면
$2b=2$
$\therefore b=1$
㉠에 $b=1$을 대입하면
$a+c=2$
$\therefore c=2-a$

$0<r<5$이므로
$r^2<25$

점 A′의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면
$\frac{a+2}{2}=-1,$
$\frac{b+0}{2}=0$
$\therefore a=-4,\ b=0$

02 점 A$(-4,\ 7)$을 x축의 방향으로 7만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 점 A$'(3,\ 9)$로 옮겨진다.

△ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{-4-1+2}{3},\ \frac{7+0+5}{3}\right) \qquad \therefore (-1,\ 4)$$

점 G$(-1,\ 4)$를 x축의 방향으로 7만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이 점 G$'$과 일치하므로 점 G$'$의 좌표는

$$(-1+7,\ 4+2) \qquad \therefore (6,\ 6)$$

따라서 두 점 G$(-1,\ 4)$, G$'(6,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-4=\frac{6-4}{6-(-1)}(x+1),\ \text{즉 } 2x-7y+30=0$$

이므로 $\quad a=2,\ b=30$

$\therefore a+b=32$ 답 32

1등급 비밀노트

△ABC가 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+7,\ y+2)$에 의하여 △A$'B'C'$으로 옮겨질 때 △ABC의 무게중심도 같은 평행이동에 의하여 옮겨지므로 평행이동한 두 점 B$'$, C$'$의 좌표를 구하여 무게중심 G$'$의 좌표를 구할 필요 없이 점 G를 평행이동하여 점 G$'$의 좌표를 구하면 된다.

03 원 C_1의 방정식은 $\quad (x-3)^2+(y-7)^2=8$

원 C_1을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

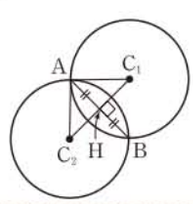
$$(-y-3)^2+(-x-7)^2=8$$

$$\therefore (x+7)^2+(y+3)^2=8$$

이 원을 다시 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원 C_2의 방정식은

$$(x-a+7)^2+(y-a+3)^2=8$$

오른쪽 그림과 같이 두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 C_1, C_2라 하고 두 직선 AB, C_1C_2의 교점을 H라 하면 직선 C_1C_2는 선분 AB를 수직이등분한다.



$\overline{AH}=\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{6}$이므로 직각삼각형 AHC_1에서

$$\overline{C_1H}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{2}$$

마찬가지로 직각삼각형 AHC_2에서

$$\overline{C_2H}=\sqrt{2}$$

따라서 $\overline{C_1C_2}=2\sqrt{2}$이고 $C_1(3,\ 7)$, $C_2(a-7,\ a-3)$이므로

$$\sqrt{(a-7-3)^2+(a-3-7)^2}=2\sqrt{2}$$

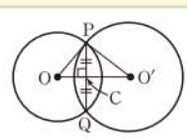
$$2(a-10)^2=8, \qquad a-10=\pm 2$$

$$\therefore a=8 \text{ 또는 } a=12$$

따라서 구하는 모든 a의 값의 합은

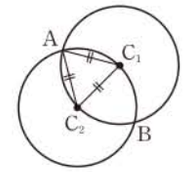
$8+12=20$ 답 20

$\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{1+b}{2}\right)$



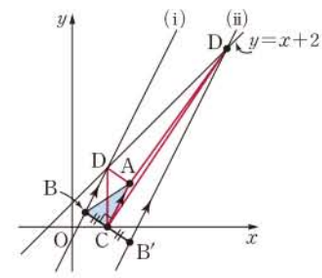
두 원 O, O'의 두 교점을 각각 P, Q라 할 때,
$\overline{PQ}\perp\overline{OO'}$
$\overline{PC}=\overline{QC}$

참고 $\overline{C_1C_2}=2\sqrt{2}$이므로 $\overline{C_1C_2}$의 길이가 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이와 같다. 즉 두 원 C_1, C_2는 오른쪽 그림과 같이 서로의 중심을 지난다.



04 두 삼각형 ABC, ADC의 넓이가 같으려면 삼각형 ABC에서 밑변을 변 AC라 할 때의 높이, 즉 점 B와 직선 AC 사이의 거리와 점 D와 직선 AC 사이의 거리가 같아야 하므로 점 D의 위치는 다음의 두 가지 경우이다.

(i) 점 D가 두 직선 AC, BD가 평행하도록 하는 직선 $y=x+2$ 위의 점인 경우



직선 AC의 기울기는 $\frac{0-4}{3-5}=2$이므로 점 B$(1,\ 1)$을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y-1=2(x-1)$$

$$\therefore y=2x-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

따라서 직선 ㉠과 직선 $y=x+2$의 교점 D의 x좌표는 $2x-1=x+2$에서 $\quad x=3$

(ii) 점 B를 직선 AC에 대하여 대칭이동한 점을 B$'$이라 하면 점 D가 두 직선 AC, B$'$D가 평행하도록 하는 직선 $y=x+2$ 위의 점인 경우

점 B$(1,\ 1)$을 직선 AC에 대하여 대칭이동한 점을 B$'(a,\ b)$이라 하면 $\overline{AC}\perp\overline{BB'}$에서

$$\frac{b-1}{a-1}\cdot 2=-1$$

$$\therefore a+2b=3 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

또 직선 AC의 방정식은 $y=2(x-3)$, 즉 $y=2x-6$이고 두 점 $\overline{BB'}$의 중점은 직선 AC 위의 점이므로

$$\frac{1+b}{2}=2\cdot\frac{1+a}{2}-6$$

$$\therefore 2a-b=11 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $\quad a=5,\ b=-1$

점 B$'(5,\ -1)$을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y-(-1)=2(x-5)$$

$$\therefore y=2x-11 \qquad \cdots\cdots ㉣$$

따라서 직선 ㉣과 직선 $y=x+2$의 교점 D의 x좌표는 $2x-11=x+2$에서 $\quad x=13$

(i), (ii)에서 구하는 모든 점 D의 x좌표의 합은

$3+13=16$ 답 16

05 두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\overline{OA}=\overline{OD}$, $\overline{OB}=\overline{OC}$

또 원점 O가 선분 AC를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\overline{OC}=x$라 하면 $\overline{OA}=2x$

□ADCB의 넓이가 18이므로

$\frac{1}{2}\cdot 3x\cdot x+\frac{1}{2}\cdot 3x\cdot 2x=18$

$x^2=4$ $\therefore x=2\ (\because x>0)$

따라서 A(−4, 0), B(0, 2), C(2, 0), D(0, −4)이므로 두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$의 방정식은 각각

$\frac{x}{-4}+\frac{y}{2}=1$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{-4}=1$

$\therefore y=\frac{1}{2}x+2$, $y=2x-4$

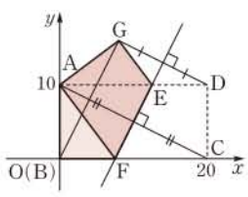
따라서

$a=\frac{1}{2}$, $b=2$, $c=2$, $d=-4$

이므로

$a+b+c+d=\frac{1}{2}$ 답 ①

06 오른쪽 그림과 같이 두 직선 BF, AB를 각각 x축, y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이고, 두 점 A(0, 10), C(20, 0)은 직선 EF에 대하여 대칭이다.



직선 AC의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 직선 AC와 직선 EF는 서로 수직이므로 직선 EF의 기울기는 2이다.

또 선분 AC의 중점 (10, 5)는 직선 EF 위의 점이므로 직선 EF의 방정식은

$y-5=2(x-10)$ $\therefore y=2x-15$

이때 G(a, b)라 하면 두 점 D(20, 10), G(a, b)는 직선 $y=2x-15$에 대하여 대칭이므로 직선 DG의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

즉 $\frac{b-10}{a-20}=-\frac{1}{2}$이므로

$a+2b=40$ …… ㉠

또 선분 DG의 중점 $\left(\frac{20+a}{2}, \frac{10+b}{2}\right)$는 직선 $y=2x-15$ 위의 점이므로

$\frac{10+b}{2}=2\cdot\frac{20+a}{2}-15$

$\therefore 2a-b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8$, $b=16$

따라서 G(8, 16)이므로

$\overline{BG}=\sqrt{8^2+16^2}=8\sqrt{5}$ 답 ④

일품 BOX

$\overline{OA}=\overline{OD}=2x$, $\overline{OB}=\overline{OC}=x$

△ABC+△ACD =□ADCB

만일 $m=14$, $n=2$이면 m, n이 서로소라는 조건을 만족시키지 않는다.

직선 $y=2x-1$과 직선 AC의 교점을 M이라 하면 △APM≡△CPM (SAS 합동)이므로 $\overline{PA}=\overline{PC}$ 마찬가지 방법으로 $\overline{PB}=\overline{PD}$

이등변삼각형의 밑변의 수직이등분선은 이등변삼각형의 꼭지각을 지난다.

두 점 A(0, 10), C(20, 0)을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{0-10}{20-0}=-\frac{1}{2}$

$\left(\frac{0+20}{2}, \frac{10+0}{2}\right)$

두 삼각형 APC, BPD의 넓이의 비가 4 : 1이고 △APM$=\frac{1}{2}$△APC, △BPN$=\frac{1}{2}$△BPD 이므로 두 삼각형 APM, BPN의 넓이의 비도 4 : 1이다.

만점 도전을 위한 실전 마무리 문제

본책 115~118쪽

01 전략 선분 PQ를 3 : 4로 내분하는 점의 좌표를 m, n에 대한 식으로 나타낸 후 그 좌표가 6과 같음을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}$를 $m:n$으로 내분하는 점과 외분하는 점이 각각 P, Q이므로

$P\left(\frac{6m+2n}{m+n}\right)$, $Q\left(\frac{6m-2n}{m-n}\right)$

점 B가 $\overline{PQ}$를 3 : 4로 내분하므로

$\frac{1}{3+4}\left(3\cdot\frac{6m-2n}{m-n}+4\cdot\frac{6m+2n}{m+n}\right)=6$

$\frac{9m-3n}{m-n}+\frac{12m+4n}{m+n}=21$

$(9m-3n)(m+n)+(12m+4n)(m-n)$
$=21(m-n)(m+n)$

$7n^2-mn=0$, $n(7n-m)=0$

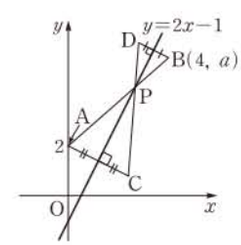
$n>0$이므로 $7n-m=0$ $\therefore 7n=m$

$\therefore m:n=7:1$

따라서 $m=7$, $n=1$이므로 $m+n=8$ 답 ④

02 전략 직선 l에 대하여 두 점 S, T가 대칭이면 직선 l이 $\overline{ST}$의 수직이등분선임을 이용한다.

풀이 두 삼각형 APC, BPD는 각각 $\overline{PA}=\overline{PC}$, $\overline{PB}=\overline{PD}$인 이등변삼각형이고 직선 $y=2x-1$이 이 두 삼각형의 밑변의 수직이등분선이므로 직선 $y=2x-1$은 점 P를 지난다.



이때 두 직선 AC, BD는 직선 $y=2x-1$과 각각 수직이므로 두 직선 AC, BD는 평행하다. 따라서 △APC∽△BPD이고 두 삼각형 APC, BPD의 넓이의 비가 4 : 1이므로 두 삼각형의 닮음비는 2 : 1이다.

$\therefore \overline{AP}:\overline{BP}=2:1$

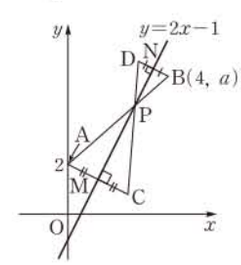
즉 점 P는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$\left(\frac{2\cdot 4+1\cdot 0}{2+1}, \frac{2\cdot a+1\cdot 2}{2+1}\right)$ $\therefore \left(\frac{8}{3}, \frac{2a+2}{3}\right)$

이때 점 P는 직선 $y=2x-1$ 위의 점이므로

$\frac{2a+2}{3}=2\cdot\frac{8}{3}-1$ $\therefore a=\frac{11}{2}$ 답 ④

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=2x-1$과 두 직선 AC, BD의 교점을 각각 M, N이라 하면 △APM∽△BPN이고 두 삼각형 APM, BPN의 넓이의 비가 4 : 1이므로 두 삼각형의 닮음비는 2 : 1이다.



따라서 $\overline{AM}:\overline{BN}=2:1$이고, $\overline{AM}$, $\overline{BN}$의 길이는 각각 두 점 A, B와 직선 $y=2x-1$, 즉 $2x-y-1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-2-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}:\frac{|8-a-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2:1$$

$$\frac{2|7-a|}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$|7-a|=\frac{3}{2}$$

그런데 $a<7$에서 $7-a>0$이므로

$$7-a=\frac{3}{2} \qquad \therefore a=\frac{11}{2}$$

03 전략 직선 l이 x축, y축과 만나는 두 점과 원점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표가 $(2, 1)$임을 이용한다.

풀이 직선 l이 x축, y축과 만나는 점을 각각 $A(a, 0)$, $B(0, b)$라 하자. 원점 O에 대하여 △OAB의 무게중심의 좌표가 $(2, 1)$이므로

$$\frac{0+a+0}{3}=2,\ \frac{0+0+b}{3}=1$$

$$\therefore a=6,\ b=3$$

따라서 직선 l의 방정식이 $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$, 즉

$y=-\frac{1}{2}x+3$이므로 직선 l의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

답 ①

04 전략 점 A를 지나고 직선 l과 수직인 직선의 방정식을 k를 사용하여 나타낸다.

풀이 $kx+y-2k+1=0$에서

$$y=-kx+2k-1$$

$x=0$일 때 $y=2k-1$이므로

$$A(0,\ 2k-1)$$

또 직선 l의 기울기는 $-k$이므로 점 A를 지나고 직선 l과 수직인 직선의 방정식은

$$y=\frac{1}{k}x+2k-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $y=0$일 때 $0=\frac{1}{k}x+2k-1$이므로 직선 ㉠의 x절편은

$$x=-k(2k-1)=-2k^2+k$$

$$=-2\left(k-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$$

따라서 $k=\frac{1}{4}$일 때 직선 ㉠의 x절편은 최댓값 $\frac{1}{8}$을 갖는다.

답 ②

05 전략 정삼각형의 넓이가 최소일 때는 한 변의 길이가 최소일 때임을 이용한다.

풀이 정삼각형 ABC의 넓이가 최소가 되기 위해서는 $\overline{AB}$의 길이가 최소가 되어야 한다.

일품 BOX

$y=3x-4$에 $x=1$, $y=-1$을 대입하면 등식이 성립하므로 직선 $y=3x-4$는 점 $(1, -1)$을 지난다.

한 변의 길이가 a인 정삼각형에서

① 높이: $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

② 넓이: $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

그런데 두 직선 $y=x+3$, $y=x-1$은 평행하고 두 점 A, B는 각각 두 직선 위의 점이므로 선분 AB의 길이의 최솟값은 두 직선 $y=x+3$, $y=x-1$ 사이의 거리와 같다.

직선 $y=x+3$ 위의 한 점 $(0, 3)$과 직선 $y=x-1$, 즉 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-3-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

이므로 △ABC의 넓이의 최솟값은

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(2\sqrt{2})^2=2\sqrt{3}$$

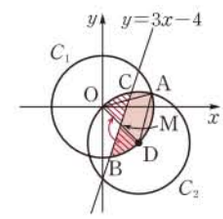
답 ③

06 전략 직선 l이 두 원의 중심을 잇는 선분의 중점을 지남을 이용한다.

풀이 원 C_2의 중심을 D라 하고 선분 OD의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는

$$\left(\frac{0+2}{2},\ \frac{0-2}{2}\right) \qquad \therefore (1,\ -1)$$

직선 $y=3x-4$는 점 M을 지나므로 구하는 넓이는 오른쪽 그림에서 선분 OD와 두 호 AO, AD로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.



이때 두 원 C_1, C_2는 서로의 중심을 지나므로 삼각형 AOD는 정삼각형이다.

따라서 구하는 넓이는

(부채꼴 AOD의 넓이)+(부채꼴 ADO의 넓이)
−△AOD

$$=2\left(\pi\cdot 8\cdot\frac{60}{360}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 8$$

$$=\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}$$

답 ③

07 전략 주어진 방정식을 $(x-a)^2+(x-b)^2=r^2$ 꼴로 변형한 후 반지름의 길이를 k에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $x^2+y^2+2kx+2(k-1)y+k=0$에서

$$(x+k)^2+\{y+(k-1)\}^2=2k^2-3k+1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

원의 반지름의 길이는 0보다 커야 하므로

$$2k^2-3k+1>0$$

$$(2k-1)(k-1)>0$$

$$\therefore k<\frac{1}{2} \text{ 또는 } k>1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

원 ㉠이 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$보다 작은 원을 나타내려면

$$2k^2-3k+1<10$$

$$2k^2-3k-9<0$$

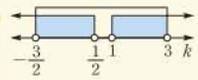
$$(2k+3)(k-3)<0$$

$$\therefore -\frac{3}{2}<k<3 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

따라서 ㉡, ㉢을 모두 만족시키는 k의 값의 범위는

$$-\frac{3}{2}<k<\frac{1}{2} \text{ 또는 } 1<k<3$$

이므로 구하는 정수 k는 -1, 0, 2의 3개이다. 답 ②



08 전략 실수 k의 값에 관계없이 $f(x)+k\cdot g(x)=0$이 성립하면 $f(x)=0$, $g(x)=0$임을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2+kx+2ky+3k-9=0$에서

$$(x^2+y^2-9)+k(x+2y+3)=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

원 ㉠은 실수 k의 값에 관계없이 항상 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $x+2y+3=0$의 교점을 지난다.

따라서 구하는 선분 AB의 길이는 직선 $x+2y+3=0$이 원 $x^2+y^2=9$에 의하여 잘린 선분의 길이와 같다.

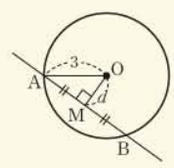
원 $x^2+y^2=9$의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $x+2y+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

이고, 원의 반지름의 길이는 3이므로

$$\overline{AB}=2\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2}=2\sqrt{\frac{36}{5}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$$

답 ④



$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-d^2}$

09 전략 $\angle TPT'=60°$일 때의 점 P의 자취를 그려 본다.

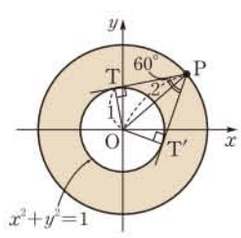
풀이 원 $x^2+y^2=1$의 중심을 O라 할 때, 점 P에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 $60°$이면 $\triangle PTO$는 $\angle T=90°$, $\angle OPT=30°$인 직각삼각형이다.

$\angle OPT=\angle OPT'$

이때 $\sin 30°=\frac{\overline{OT}}{\overline{OP}}$이므로

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{\overline{OP}} \qquad \therefore \overline{OP}=2$$

즉 $\angle TPT'=60°$일 때, 점 P는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 원 위에 있으므로 $\angle TPT'$의 크기가 $60°$ 이상일 때, 점 P가 존재하는 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$4\pi-\pi=3\pi$$

답 ②

10 전략 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$임을 이용한다.

풀이 기울기가 -3인 접선의 방정식은

$$y=-3x\pm 2\sqrt{(-3)^2+1}$$

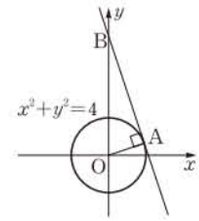
$$\therefore y=-3x\pm 2\sqrt{10}$$

이때 제1사분면 위의 점 A를 지나는 접선의 방정식은

$$y=-3x+2\sqrt{10}$$

따라서 오른쪽 그림에서 $\overline{OA}=2$, $\overline{OB}=2\sqrt{10}$이므로 직각삼각형 OAB에서

$$\overline{AB}=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-2^2}$$
$$=6$$



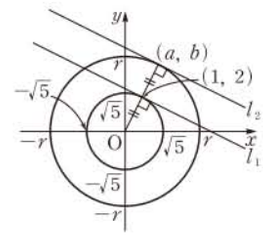
답 ③

11 전략 원점을 중심으로 하는 두 원의 접선 l_1, l_2 사이의 거리가 $\sqrt{5}$임을 이용하여 r의 값을 구한다.

풀이 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로 오른쪽 그림과 같이 점 $(a,\ b)$는 제1사분면 위에 있고

$$r=\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$$

이다.



따라서 점 $(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2=20 \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편 두 직선 l_1, l_2의 방정식은 각각

$$x+2y=5,\ ax+by=20$$

이고, 두 직선이 평행하므로

$$\frac{1}{a}=\frac{2}{b}\neq\frac{5}{20}$$

$$\therefore b=2a\ (a\neq 4) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면 $a^2+4a^2=20$

$$a^2=4 \qquad \therefore a=\pm 2$$

그런데 점 $(a,\ b)$는 제1사분면 위의 점이므로

$$a=2,\ b=4 \qquad \therefore a+b=6$$

답 ⑤

12 전략 공의 그림자가 나타내는 도형은 원임을 이용한다.

풀이 전등을 점 A, 공이 바닥과 닿은 점을 점 O라 하고, 공의 그림자인 원의 한 지름의 양 끝 점을 B, C라 하자.

빛이 수직으로 공의 중심을 지나므로 그림자는 원이다.

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고 점 O를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 O는 원점이고, 점 A는 y축 위의 점이다. 1 m를 1로 생각하면 A$(0,\ 10)$이고 공의 중심의 좌표는 $(0,\ 1)$이므로 직선 AB의 방정식을

$$y=mx+10\ (m>0)$$

이라 하면 점 $(0,\ 1)$에서 직선 $y=mx+10$, 즉 $mx-y+10=0$까지의 거리가 원의 반지름의 길이인 1과 같아야 한다. 즉

$$\frac{|-1+10|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1, \qquad \sqrt{m^2+1}=9$$

$$m^2+1=81, \qquad m^2=80$$

$$\therefore m=4\sqrt{5}\ (\because m>0)$$

따라서 직선 AB의 방정식은 $y=4\sqrt{5}x+10$이므로 점 B의 x좌표는 $y=0$일 때,

$$0=4\sqrt{5}x+10 \qquad \therefore x=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

공의 그림자는 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ m인 원이므로 구하는 넓이는 $\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{5}{4}\pi(\mathrm{m}^2)$ 답 ②

1등급 비밀노트

좌표를 이용하여 활용 문제를 해결할 때는 먼저 도형의 한 변이 좌표축 위에 오도록 도형을 좌표평면 위에 놓은 후, 도형의 꼭짓점에 해당하는 점의 좌표를 구하거나 미지수를 사용하여 나타내면 쉽게 해결할 수 있다.

13 전략 원을 대칭이동한 후 평행이동한 도형의 방정식을 구하고, 그 원이 x축과 y축에 접할 때의 중심의 좌표의 조건을 이용한다.

풀이 원 $(x-a)^2+(y+3)^2=4$를 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-3)^2=4$$

이 원을 다시 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-2)^2=4$$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 이 원이 x축과 y축에 모두 접하려면

$$|a|=2 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$$ 답 ②

14 전략 보기에 주어진 식이 원 $f(x, y)=0$을 어떻게 이동한 원의 방정식인지 알아본다.

풀이 주어진 원이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면 이 원은 세 점 O(0, 0), A(1, 0), B(0, 1)을 지난다. 이때 $\angle AOB=90°$이므로 원 $f(x, y)=0$은 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

ㄱ. 주어진 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원이 주어진 원과 일치하므로

$$f(y, x)=0$$

ㄴ. 주어진 원을 원점에 대하여 대칭이동한 원이 주어진 원과 일치하지 않으므로

$$f(-x, -y)\neq 0$$

ㄷ. 주어진 원을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 후 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원이 주어진 원과 일치하므로

$$f(1-y, 1-x)=0$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

15 전략 직선 AH가 $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$의 수직이등분선임을 이용한다.

풀이 선분 AC′이 삼각형 ABC의 무게중심을 지나므로 점 C′은 변 BC의 중점이다.

$$\therefore C'(0, 1)$$

점 H는 선분 CC′의 중점이므로 점 H의 좌표는

$$\left(1, \frac{1}{2}\right)$$

직선 AH는 직선 CC′과 수직이고 직선 CC′의 기울기는 $\frac{1-0}{0-2}=-\frac{1}{2}$이므로 직선 AH의 방정식은

$$y-\frac{1}{2}=2(x-1) \qquad \therefore y=2x-\frac{3}{2}$$

점 A(3, a)가 직선 AH 위의 점이므로

$$a=2\cdot 3-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$$

한편 선분 BB′의 중점이 H이므로

$$\frac{-2+b}{2}=1,\ \frac{2+c}{2}=\frac{1}{2} \qquad \therefore b=4,\ c=-1$$

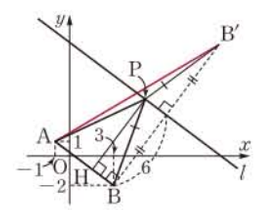
$$\therefore a+b+c=\frac{15}{2}$$ 답 ③

16 전략 $\overline{AB}$의 길이가 정해져 있으므로 점 P가 어느 직선 위에 있어야 하는지 생각해 본다.

풀이 $\overline{AB}=\sqrt{(3+1)^2+(-2-1)^2}=5$

점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 △ABP의 넓이가 15이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\overline{PH}=15 \qquad \therefore \overline{PH}=6$$



따라서 오른쪽 그림과 같이 점 P는 직선 AB와 평행하고 직선 AB로부터의 거리가 6인 직선 l 위의 점이다. 점 B를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 △ABP의 둘레의 길이는

$$\overline{AB}+\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AB}+\overline{AP}+\overline{B'P}\geq\overline{AB}+\overline{AB'}$$

이므로 점 P가 선분 AB′과 직선 l의 교점일 때 최소이다.

이때 $\overline{BB'}=12$이므로 직각삼각형 ABB′에서

$$\overline{AB'}=\sqrt{5^2+12^2}=13$$

$$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AB'}=13$$ 답 ③

17 전략 무게중심의 좌표를 $y=px$에 대입하면 등식이 성립함을 이용한다.

풀이 △ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{p-7}{3}, \frac{3-p^2}{3}\right)$$

이 점이 직선 $y=px$ 위에 있으므로

$$\frac{3-p^2}{3}=p\cdot\frac{p-7}{3}$$

$$3-p^2=p^2-7p, \qquad 2p^2-7p-3=0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a=\frac{7}{2},\ b=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore a+b=2$$ 답 2

일품 BOX

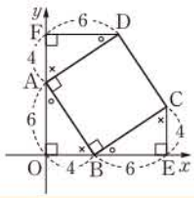
지름의 양 끝 점과 원 위의 한 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형은 직각삼각형이다.

원 $f(x, y)=0$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 원의 방정식은
$f(x+1, y+1)=0$
이 원을 다시 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$f(-y+1, -x+1)=0$

삼각형의 무게중심은 세 중선의 교점이다.

18 전략 □ABCD가 정사각형임을 이용하여 두 점 C, D의 좌표를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 두 점 C, D에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하면



$\triangle OAB \equiv \triangle EBC$
$\equiv \triangle FDA$

이므로

$\overline{OA}=\overline{EB}=\overline{FD}=6$, $\overline{OB}=\overline{EC}=\overline{FA}=4$

따라서 두 점 C, D의 좌표는

C(10, 4), D(6, 10)

점 M은 $\overline{BC}$의 중점이므로

$M\left(\frac{4+10}{2}, \frac{0+4}{2}\right)$ $\quad\therefore$ M(7, 2)

직선 DM의 방정식은

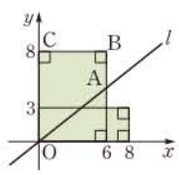
$y-2=\frac{2-10}{7-6}(x-7)$ $\quad\therefore y=-8x+58$

따라서 직선 DM의 y절편은 58이다. 답 58

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{DA}$,
$\angle OAB=\angle EBC$
$=\angle FDA$,
$\angle OBA=\angle ECB$
$=\angle FAD$
$\therefore \triangle OAB \equiv \triangle EBC$
$\equiv \triangle FDA$
(ASA 합동)

19 전략 직선 l에 의하여 이등분된 부분 중 사다리꼴의 넓이를 k에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$6\cdot8+2\cdot3=54$

이므로 □OABC의 넓이는 27이다. ··· ❶

직선 l의 방정식은 $y=kx$이므로 점 A의 좌표는

$(6, 6k)$

□OABC의 넓이가 27이므로

$\frac{1}{2}\cdot\{8+(8-6k)\}\cdot6=27$

$16-6k=9$ $\quad\therefore k=\frac{7}{6}$ ··· ❷

$\therefore 30k=30\cdot\frac{7}{6}=35$ ··· ❸

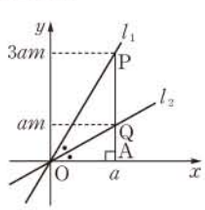
답 35

두 점 A, B의 y좌표가 각각 $6k$, 8이므로
$\overline{AB}=8-6k$

채점 기준	비율
❶ 색칠한 부분의 넓이를 이등분한 넓이를 구할 수 있다.	30 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $30k$의 값을 구할 수 있다.	20 %

20 전략 두 조건을 모두 만족시키는 두 직선 l_1, l_2를 그리고, 삼각형의 내각의 이등분선의 성질을 이용한다.

풀이 두 직선 l_1과 l_2를



l_1: $y=3mx$,

l_2: $y=mx$ $(m>0)$

라 하고, x축 위의 원점이 아닌 한 점을 A$(a, 0)$ $(a>0)$이라 하자. 점 A를 지나고 x축에 수직인 직선이 두 직선 l_1, l_2와 만나는 점을 각각 P, Q라 하면

P$(a, 3am)$, Q(a, am) ··· ❶

조건 (나)에 의하여 $\angle POA=2\angle QOA$이므로 직선 OQ는 $\angle POA$의 이등분선이다.

즉 $\triangle OAP$에서 삼각형의 내각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{OA}:\overline{OP}=\overline{AQ}:\overline{QP}$

$a:\sqrt{a^2+(3am)^2}=1:2$ ··· ❷

$\sqrt{a^2+(3am)^2}=2a$

$a^2+9a^2m^2=4a^2$ $\quad\therefore m^2=\frac{1}{3}$ $(\because a\neq0)$

$\therefore m=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $(\because m>0)$

따라서 직선 l_1의 기울기는 $3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$ ··· ❸

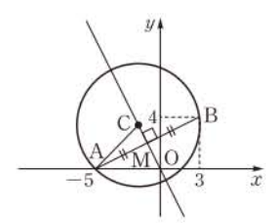
답 $\sqrt{3}$

$\overline{AQ}:\overline{QP}$
$=am:(3am-am)$
$=am:2am$
$=1:2$

채점 기준	비율
❶ 조건 (가)를 이용하여 x좌표가 같은 두 직선 l_1, l_2 위의 점을 잡을 수 있다.	30 %
❷ 조건 (나)를 이용하여 비례식을 세울 수 있다.	40 %
❸ 직선 l_1의 기울기를 구할 수 있다.	30 %

21 전략 두 점을 지나는 원의 반지름의 길이가 최소일 때의 원의 중심의 위치를 생각해 본다.

풀이 두 점 A, B를 지나는 원을 C라 하고 그 중심을 C라 하자.



선분 AB는 원 C의 현이고, 점 C에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로 선분 AB의 중점을 M이라 하면 점 C는 점 M을 지나고 선분 AB에 수직인 직선 위에 존재한다.

이때 $\overline{AM}\le\overline{AC}$이므로 $\overline{AM}=\overline{AC}$일 때, 즉 점 M이 원의 중심 C일 때, 원 C의 반지름의 길이가 최소이다.

따라서 반지름의 길이의 최솟값 k는

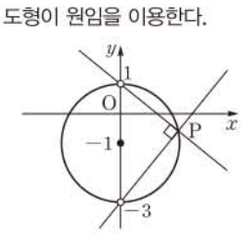
$k=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(3+5)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

이므로 $\quad k^2=20$ 답 20

원 C가 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원일 때

22 전략 두 직선의 y절편은 정해져 있고, 점 P는 수직인 두 직선의 교점이므로 점 P가 나타내는 도형이 원임을 이용한다.

풀이 주어진 두 직선의 기울기가 각각 m, $-\frac{1}{m}$이므로



두 직선은 서로 수직이다.

즉 점 P는 오른쪽 그림과 같이 두 점 (0, 1), (0, −3)을 지름의 양 끝 점으로 하는 원 위의 점이다.

m의 값에 관계없이 직선 $y=mx+1$은 점 (0, 1)을, 직선 $y=-\frac{1}{m}x-3$은 점 (0, −3)을 항상 지난다.

그런데 $m\neq0$이므로 $x=0$일 때에는 조건을 만족시키는 점 P가 존재하지 않는다.

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이

$$\left(0,\ \frac{1-3}{2}\right),\ 즉\ (0,\ -1)$$

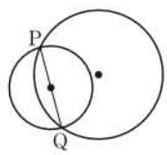
이고 반지름의 길이가 2인 원에서 $x=0$인 점이 빠진 도형이므로 그 방정식은

$$x^2+(y+1)^2=4\ (x\neq0)$$

답 $x^2+(y+1)^2=4\ (x\neq0)$

23 전략 $\overline{PQ}$가 원 $x^2+y^2=5$의 지름일 때 $\overline{PQ}$의 길이가 최대임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 두 원의 공통인 현 PQ가 원 $x^2+y^2=5$의 지름일 때 선분 PQ의 길이가 최대이므로 직선 PQ가 원 $x^2+y^2=5$의 중심 $(0,\ 0)$을 지나야 한다. ··· ❶



직선 PQ의 방정식은

$$(x-k)^2+(y+2)^2-10-(x^2+y^2-5)=0$$

$$\therefore\ -2kx+4y+k^2-1=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 점 $(0,\ 0)$을 지나야 하므로

$$k^2-1=0,\qquad k^2=1$$

$$\therefore\ k=\pm1$$ ··· ❷

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$$-1\cdot1=-1$$ ··· ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 직선 PQ가 원 $x^2+y^2=5$의 중심을 지남을 알 수 있다.	30 %
❷ k의 값을 모두 구할 수 있다.	60 %
❸ 모든 실수 k의 값의 곱을 구할 수 있다.	10 %

24 전략 두 직선 사이의 거리가 원의 지름의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 두 직선 $4x-3y+a=0$, $4x-3y+b=0$은 평행하고 한 원에 동시에 접하므로 두 직선 사이의 거리는 원의 지름의 길이와 같다.

직선 $4x-3y+a=0$ 위의 한 점 $\left(0,\ \frac{a}{3}\right)$와 직선 $4x-3y+b=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-a+b|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|a-b|}{5}$$

원의 넓이가 4π이면 반지름의 길이가 2이므로

$$\frac{|a-b|}{5}=2\cdot2$$

$$\therefore\ |a-b|=20$$

$$\therefore\ a^2+b^2=|a-b|^2+2ab$$
$$=20^2+2\cdot(-84)$$
$$=232$$

답 232

일품 BOX

$y=mx+1$,

$y=-\frac{1}{m}x-3$에서

$mx+1=-\frac{1}{m}x-3$

$\left(m+\frac{1}{m}\right)x=-4$

$\frac{m^2+1}{m}x=-4$

$\therefore\ x=-\frac{4m}{m^2+1}$

따라서 $m\neq0$이면 $x\neq0$이다.

$1=\frac{n+12}{n}$에서

$n=n+12$

$\therefore\ 0=12$

따라서 모순이다.

25 전략 도형 $f(x+3,\ y-1)=0$을 도형 $f(x,\ y)=0$으로 옮기는 평행이동을 구한다.

풀이 도형 $f(x+3,\ y-1)=0$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 도형 $f(x,\ y)=0$으로 옮겨진다.

따라서 점 $(-1,\ 3)$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 점 $(a,\ b)$로 옮겨지므로

$$-1+3=a,\ 3-1=b$$

$$\therefore\ a=2,\ b=2$$

$$\therefore\ a+b=4$$

답 4

26 전략 직선 $y=mx$가 원 C의 넓이를 이등분하므로 직선 $y=mx$가 원 C의 중심을 지남을 이용한다.

풀이 원 $x^2+(y-7)^2=9$의 중심의 좌표가 $(0,\ 7)$이므로 원 C의 중심의 좌표는

$$(n,\ n+12)$$

직선 $y=mx$가 원 C의 중심 $(n,\ n+12)$를 지나므로

$$n+12=mn \qquad \therefore\ m=\frac{n+12}{n}$$

$m=5$일 때, $5=\frac{n+12}{n}$에서 $\quad n=3$

$m=4$일 때, $4=\frac{n+12}{n}$에서 $\quad n=4$

$m=3$일 때, $3=\frac{n+12}{n}$에서 $\quad n=6$

$m=2$일 때, $2=\frac{n+12}{n}$에서 $\quad n=12$

$m=1$일 때, $1=\frac{n+12}{n}$를 만족시키는 n의 값은 없다.

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$$3+4+6+12=25$$

답 25

27 전략 두 포물선의 꼭짓점이 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 포물선 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$의 꼭짓점을 A라 하면 $\quad A(1,\ -1)$

포물선 $y=-x^2+6x-4=-(x-3)^2+5$의 꼭짓점을 B라 하면 $\quad B(3,\ 5)$ ··· ❶

두 포물선이 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이므로 포물선의 꼭짓점도 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이다.

따라서 선분 AB의 중점이 점 $(a,\ b)$이므로

$$a=\frac{1+3}{2}=2,\ b=\frac{-1+5}{2}=2$$ ··· ❷

$$\therefore\ a+b=4$$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 두 포물선의 꼭짓점의 좌표를 각각 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

28 전략 도형 $f(x, y)=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(x, y)=0$에 x 대신 $-x$를 대입한 식임을 이용한다.

풀이 두 점 O(0, 0), A($\sqrt{3}$, 3)을 지나는 직선 l의 방정식은 $y=\sqrt{3}x$이므로 직선 m의 방정식은

$y=-\sqrt{3}x$ ⋯ ❶

P(a, b) ($a>0$, $b>0$, $a\neq\sqrt{3}$, $b\neq3$)라 하면

$$\overline{PL}=\frac{|\sqrt{3}a-b|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{|\sqrt{3}a-b|}{2},$$

$$\overline{PM}=\frac{|\sqrt{3}a+b|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\frac{|\sqrt{3}a+b|}{2},$$

$\overline{PN}=b$

$$\therefore \overline{PL}^2+\overline{PM}^2+\overline{PN}^2$$
$$=\frac{3a^2-2\sqrt{3}ab+b^2}{4}+\frac{3a^2+2\sqrt{3}ab+b^2}{4}+b^2$$
$$=\frac{3}{2}(a^2+b^2) \quad \cdots ❷$$

이때 $a^2+b^2=12$이므로

점 P(a, b)가 원 $x^2+y^2=12$ 위의 점이므로 $a^2+b^2=12$

$$\overline{PL}^2+\overline{PM}^2+\overline{PN}^2=\frac{3}{2}\cdot12=18 \quad \cdots ❸$$

답 18

채점 기준	비율
❶ 두 직선 l, m의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\overline{PL}^2+\overline{PM}^2+\overline{PN}^2$의 값을 점 P의 좌표를 이용하여 나타낼 수 있다.	50 %
❸ $\overline{PL}^2+\overline{PM}^2+\overline{PN}^2$의 값을 구할 수 있다.	20 %

최상위로 가는 최고 수준 문제

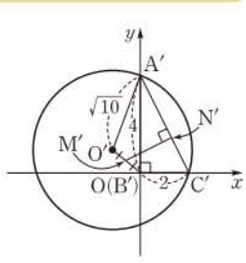
본책 119쪽

01

해결 단계

❶ 점 B를 원점으로 하는 새로운 좌표평면에 주어진 원을 놓았을 때, 두 점 A, C가 옮겨지는 두 점 A′, C′의 좌표를 구한다.
❷ 새로운 좌표평면에 놓인 원의 중심 O′의 좌표를 구한 후 $\overline{O'B'}$의 길이를 구한다.
❸ 직선 A′C′의 방정식과 점 M′의 좌표를 이용하여 $\overline{M'N'}$의 길이를 구한다.
❹ $\overline{OB}\times\overline{MN}$의 값을 구한다.

풀이 ❶ 두 직선 BC, BA를 각각 x축, y축으로 하는 새로운 좌표평면을 잡았을 때, 오른쪽 그림과 같이 점 A, B, C, M, N, O가 옮겨지는 점을 각각 점 A′, B′, C′, M′, N′, O′이라 하면



B′(0, 0), A′(0, 4), C′(2, 0)이다.

❷ 새로운 좌표평면에 놓인 원의 중심 O′의 좌표를 (a, b)라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=10$ ⋯⋯ ㉠

원 ㉠이 점 A′(0, 4)를 지나므로

$a^2+b^2-8b+6=0$ ⋯⋯ ㉡

또 원 ㉠이 점 C′(2, 0)을 지나므로

$a^2+b^2-4a-6=0$ ⋯⋯ ㉢

㉡−㉢을 하면 $4a-8b+12=0$ $\therefore a=2b-3$

이것을 ㉡에 대입하면

$(2b-3)^2+b^2-8b+6=0$

$b^2-4b+3=0$, $(b-1)(b-3)=0$

$\therefore b=1$ 또는 $b=3$

두 점 A′, C′을 지나고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원은 중심이 점 (−1, 1)인 원과 중심이 점 (3, 3)인 원의 두 개이다.

$b=1$이면 $a=2\cdot1-3=-1$

$b=3$이면 $a=2\cdot3-3=3$

그런데 점 (a, b)는 제2사분면 위의 점이므로

$a=-1$, $b=1$

즉 O′(−1, 1)이므로 $\overline{O'B'}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

❸ 선분 O′B′의 중점 M′의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$이고, 직선 A′C′의 방정식은 $2x+y-4=0$이므로

x절편이 2, y절편이 4이므로 $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$ $\therefore 2x+y-4=0$

$$\overline{M'N'}=\frac{\left|2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}-4\right|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{9\sqrt{5}}{10}$$

❹ $\therefore \overline{OB}\times\overline{MN}=\overline{O'B'}\times\overline{M'N'}$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{9\sqrt{5}}{10}=\frac{9\sqrt{10}}{10}$$

답 ⑤

02

해결 단계

❶ 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식을 구한다.
❷ 현 AB의 중점을 M이라 하고, $\overline{OM}$, $\overline{AM}$, $\overline{TO}$의 길이를 구한다.
❸ 피타고라스 정리를 이용하여 a^2+4a의 값을 구한다.

풀이 ❶ A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)라 하면 두 점 A, B에서의 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=5$, $x_2x+y_2y=5$

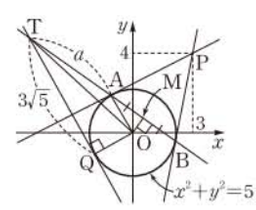
두 접선은 모두 점 P(3, 4)를 지나므로

$3x_1+4y_1=5$, $3x_2+4y_2=5$

따라서 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$3x+4y=5$

❷ 오른쪽 그림과 같이 현 AB의 중점을 M이라 하면 원의 중심 O(0, 0)과 직선 $3x+4y-5=0$ 사이의 거리는



$$\overline{OM}=\frac{|-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$

이고, $\overline{OA}=\sqrt{5}$이므로 직각삼각형 AOM에서

$\overline{AM}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$

또 직각삼각형 TQO에서

$\overline{TO}=\sqrt{(3\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2}=5\sqrt{2}$

❸ 직각삼각형 TOM에서

$(5\sqrt{2})^2=(a+2)^2+1^2$ $\therefore a^2+4a=45$ 답 45

03

해결 단계

❶ $\frac{b+d}{a+c}$의 값이 점 P와 점 Q를 원점에 대하여 대칭이동한 점 Q′을 지나는 직선의 기울기임을 안다.

❷ $\frac{b+d}{a+c}$의 값이 최대일 때와 최소일 때가 어떤 경우인지 생각해 본다.

❸ $\frac{b+d}{a+c}$의 최댓값과 최솟값의 합을 구한다.

풀이 ❶ $x^2+y^2-6x-10y+30=0$에서

$(x-3)^2+(y-5)^2=4$

$\frac{b+d}{a+c}=\frac{b-(-d)}{a-(-c)}$이므로 $Q'(-c,\ -d)$라 하면

$\frac{b+d}{a+c}$의 값은 두 점 P, Q′을 지나는 직선의 기울기이다.

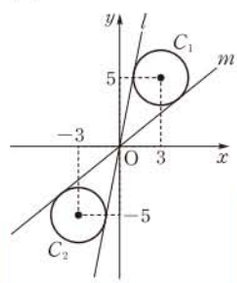
이때 점 $Q'(-c,\ -d)$는 점 $Q(c,\ d)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 Q′은 원 $(x+3)^2+(y+5)^2=4$ 위의 점이다.

❷ C_1: $(x-3)^2+(y-5)^2=4$,

C_2: $(x+3)^2+(y+5)^2=4$

라 하면 오른쪽 그림에서

$\frac{b+d}{a+c}$의 최댓값과 최솟값은 각각 직선 l의 기울기와 직선 m의 기울기와 같다.



두 직선 l, m은 두 원 C_1, C_2에 동시에 접한다.

❸ 이때 두 직선 l, m은 원점을 지나므로 원 $(x-3)^2+(y-5)^2=4$에 접하는 직선의 방정식을 $y=kx$라 하면 원의 중심 $(3,\ 5)$와 직선 $kx-y=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 2이다.

즉

$$\frac{|3k-5|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=2$$

$$|3k-5|=2\sqrt{k^2+1}$$

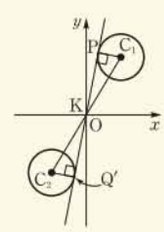
$$(3k-5)^2=4(k^2+1)$$

$$\therefore 5k^2-30k+21=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

따라서 두 직선 l, m의 기울기는 각각 이차방정식 ㉠의 두 근 중 큰 값과 작은 값이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 직선 l, m의 기울기의 합은

$$-\frac{-30}{5}=6$$

즉 $\frac{b+d}{a+c}$의 최댓값과 최솟값의 합은 6이다. 답 6



두 직선 C_1C_2, PQ′의 교점을 K라 하면

$\triangle PKC_1 \equiv \triangle Q'KC_2$

이므로 $\overline{C_1K}=\overline{C_2K}$

따라서 직선 PQ′은 $\overline{C_1C_2}$의 중점을 지난다. 그런데 두 점 C_1, C_2는 원점에 대하여 대칭이므로 $\overline{C_1C_2}$의 중점은 원점이다. 즉 직선 PQ′은 원점을 지난다.

04

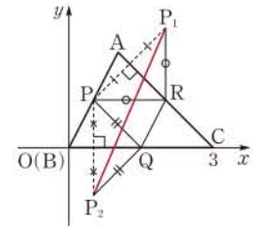
해결 단계

❶ 점 B를 원점으로 하는 좌표평면을 잡았을 때, 점 A의 좌표를 구한다.

❷ 점 P를 직선 AC, x축에 대하여 각각 대칭이동한 두 점의 좌표를 같은 문자를 사용하여 나타낸다.

❸ 삼각형 PQR의 둘레의 길이가 최소인 경우를 찾아 그 최솟값을 구한다.

풀이 ❶ 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고 점 B를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이다.



C(3, 0)이고, 점 A의 좌표를 $(\alpha,\ \beta)$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$라 하면

$\overline{AB}^2=5$에서 $\alpha^2+\beta^2=5$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{AC}^2=8$에서 $(3-\alpha)^2+(-\beta)^2=8$

$\therefore \alpha^2+\beta^2-6\alpha=-1$ ⋯⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면 $6\alpha=6$ $\therefore \alpha=1$

㉠에 $\alpha=1$을 대입하여 풀면 $\beta=2$ ($\because \beta>0$)

$\therefore A(1,\ 2)$

❷ 직선 AB의 방정식은 $y=2x$이므로 점 P를 $P(a,\ 2a)$ $(0<a<1)$라 하자.

직선 AC의 방정식은 $y=\frac{0-2}{3-1}(x-3)$, 즉

$y=-x+3$이므로 점 P를 직선 AC에 대하여 대칭이동한 점을 $P_1(c,\ d)$라 하면 $\overline{AC}\perp\overline{PP_1}$에서

$$\frac{d-2a}{c-a}=1, \quad d-2a=c-a$$

$$\therefore d-c=a \quad \cdots\cdots ㉢$$

$\overline{PP_1}$의 중점 $\left(\frac{a+c}{2},\ \frac{2a+d}{2}\right)$가 직선 AC 위의 점이므로

$$\frac{2a+d}{2}=-\frac{a+c}{2}+3$$

$$2a+d=-a-c+6$$

$$\therefore d+c=-3a+6 \quad \cdots\cdots ㉣$$

㉢−㉣을 하면 $-2c=4a-6$

$\therefore c=-2a+3$

㉢+㉣을 하면 $2d=-2a+6$

$\therefore d=-a+3$

$\therefore P_1(-2a+3,\ -a+3)$

또 점 P를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P_2라 하면

$P_2(a,\ -2a)$

❸ 이때 $\overline{RP}=\overline{RP_1}$, $\overline{QP}=\overline{QP_2}$이므로 삼각형 PQR의 둘레의 길이는 $\overline{RP_1}+\overline{RQ}+\overline{QP_2}$의 값과 같다.

$$\therefore \overline{RP_1}+\overline{RQ}+\overline{QP_2}$$

$$\geq \overline{P_1P_2}$$

$$=\sqrt{(a+2a-3)^2+(-2a+a-3)^2}$$

$$=\sqrt{(3a-3)^2+(-a-3)^2}$$

$$=\sqrt{10a^2-12a+18}$$

$$=\sqrt{10\left(a-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{72}{5}} \ (0<a<1)$$

따라서 삼각형 PQR의 둘레의 길이의 최솟값은

$\sqrt{\frac{72}{5}}$, 즉 $\frac{6\sqrt{10}}{5}$ 답 ①