최고 수준 문제해결서

# 일품

## 정답 및 풀이

# I. 다항식

## 01 다항식의 연산

본책 8~10쪽 01 ② 02 $-8x^2-6x+5$
03 ⑤ 04 5 05 $-20$ 06 ④ 07 ③
08 ⑤ 09 10 10 ③ 11 ④ 12 ④
13 ⑤ 14 3 15 ⑤ 16 $\frac{3}{2}$ 17 ②
18 20

본책 11~13쪽 01 12 02 ③ 03 25
04 ① 05 $-19$ 06 $-12$ 07 ⑤ 08 ②
09 ⑤ 10 640 11 ② 12 169 13 ④
14 0 15 ④ 16 $4\sqrt{13}$ 17 ③ 18 18
19 30 20 ④ 21 8 22 ③ 23 $-3$
24 ③

본책 14쪽 01 ① 02 429 03 ①
04 ③ 05 800

## 02 나머지정리와 인수분해

본책 16~18쪽 01 6 02 4 03 ①
04 ④ 05 $-36$ 06 $\frac{21}{4}$ 07 ③ 08 28
09 ③ 10 ① 11 ② 12 ③ 13 5
14 ② 15 ② 16 ② 17 ② 18 7

본책 19~21쪽 01 5 02 $-1$ 03 ⑤
04 18 05 $2x^2+x-3$ 06 ③ 07 18
08 $-3x+3$ 09 ⑤ 10 7 11 ⑤
12 ⑤ 13 36 14 ③ 15 ①
16 $a=c$인 이등변삼각형 17 ② 18 ⑤ 19 ④
20 ④ 21 24 22 26 23 ④

본책 22쪽 01 ① 02 3 03 29
04 ② 05 4 06 ③ 07 100

---

본책 23~26쪽 01 ③ 02 ⑤ 03 ④
04 ③ 05 ⑤ 06 ③ 07 ② 08 ④
09 ④ 10 ② 11 ⑤ 12 ③ 13 ③
14 ① 15 ④ 16 ② 17 ④ 18 $-4$
19 50 20 29 21 $\frac{55}{6}$ 22 6 23 16
24 18 25 15 26 $-9$ 27 20 28 29
29 16

본책 27쪽 01 ① 02 $-x+1$ 03 5
04 ②

# II. 방정식

## 03 복소수

본책 30~32쪽 01 ⑤ 02 10 03 ④
04 2 05 ② 06 $-3+3i$ 07 ①
08 $-1$ 09 ③ 10 $1-i$ 11 $3-6i$ 12 ⑤
13 $-1024$ 14 ③ 15 50 16 ① 17 ①
18 ④

본책 33~35쪽 01 ⑤ 02 ③ 03 $\frac{1}{2}$
04 1 05 $-3$ 06 ② 07 1 08 $\frac{6}{5}i$
09 ④ 10 10 11 ④ 12 ① 13 ②
14 $-1+i$ 15 ② 16 87 17 $-40i$ 18 3
19 75 20 $a<c<b$ 21 $-4\sqrt{2}$ 22 ④
23 ②

본책 36쪽 01 ④ 02 ④ 03 ⑤
04 12 05 115 06 6 07 ①

## 04 이차방정식

본책 38~40쪽 01 ③ 02 $-1$, 4 03 ③
04 4 05 서로 다른 두 허근 06 ⑤ 07 ⑤
08 12 09 ⑤ 10 $x^2+12x-13=0$ 11 ③
12 $-3$ 13 ⑤ 14 $5\left(x+\frac{2-i}{5}\right)\left(x+\frac{2+i}{5}\right)$
15 $(x-1)\left(x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$ 16 ②
17 $-2$ 18 ②

**본책 41~43쪽** 01 $x=1-\sqrt{10}$ 또는 $x=3$

02 ③ 03 $\frac{2+\sqrt{6}}{2}$, $\frac{2-\sqrt{6}}{2}$ 04 ④

05 $x=1-\sqrt{2}$ 06 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 07 15 08 ⑤

09 $-1$ 10 정삼각형 11 $-56$ 12 ①

13 ① 14 ① 15 ④ 16 7 17 24

18 ⑤ 19 ① 20 26 21 ⑤ 22 $-26$

23 ① 24 $\frac{1}{2}$

**본책 44~45쪽** 01 9 02 ③ 03 ②

04 ③ 05 13 06 3 07 ③ 08 24

09 ④ 10 13 11 23 12 ④ 13 8

14 2

## 05 이차방정식과 이차함수

**본책 46~48쪽** 01 ④ 02 ⑤ 03 $-\frac{3}{4}$

04 4 05 ③ 06 44 07 ③ 08 ⑤

09 ③ 10 $-\frac{5}{4}$ 11 8 12 4 13 ③

14 ② 15 10 16 20 17 ② 18 $\frac{625}{2}$

**본책 49~51쪽** 01 ② 02 $2\sqrt{6}$ 03 ④

04 ⑤ 05 3 06 0 07 2 08 ④

09 ④ 10 ③ 11 ③ 12 ① 13 3

14 $-2$ 15 ⑤ 16 ② 17 47 18 24

19 ⑤ 20 800원 21 $\frac{23}{16}$

**본책 52쪽** 01 ③ 02 ③ 03 24

04 ⑤ 05 ③ 06 10

## 06 여러 가지 방정식

**본책 54~56쪽** 01 2 02 8 03 ①

04 ⑤ 05 $-60$ 06 ⑤ 07 ① 08 ③

09 ⑤ 10 136 11 ⑤ 12 ② 13 12

14 9 15 ⑤ 16 2 17 2 18 12 m

**본책 57~59쪽** 01 $\frac{1}{4}$ 02 ① 03 $-\frac{10}{3}$

04 ② 05 24 06 12

07 $cx^3+bx^2+ax+1=0$ 08 $\frac{11}{2}$

09 $2x^3-5x^2-12x+7=0$ 10 ② 11 25

12 ④ 13 ⑤ 14 ② 15 11 16 20

17 $-\frac{55}{4}$ 18 ④ 19 30 20 ③ 21 104 $\text{cm}^2$

22 $33\pi$ 23 9

**본책 60쪽** 01 63 02 ② 03 30

04 ① 05 ③ 06 16 07 ③

**본책 61~64쪽** 01 ③ 02 ① 03 ⑤

04 ② 05 ④ 06 ③ 07 ② 08 ②

09 ② 10 ④ 11 ③ 12 ⑤ 13 ④

14 ③ 15 ② 16 ④ 17 ⑤ 18 10

19 $\frac{2}{25}$ 20 10 21 빗변의 길이가 $a$인 직각삼각형

22 $x^2-x-1=0$ 23 4 24 45 25 220

26 0 27 $-12$ 28 14

**본책 65쪽** 01 937 02 $-12$ 03 $\frac{5}{4}$

04 ④

# Ⅲ. 부등식

## 07 일차부등식

**본책 68~70쪽** 01 ② 02 ⑤

03 $0<f(0)<10$ 04 $A>B$ 05 $A>B$ 06 ③

07 ③ 08 ⑤ 09 ③ 10 ⑤ 11 ④

12 10, 11 13 ③ 14 ③ 15 ② 16 ③

17 ② 18 ④

**본책 71~74쪽** 01 ⑤ 02 ⑤

03 풀이 74쪽 04 ① 05 풀이 74쪽

06 ④ 07 풀이 74쪽 08 ④ 09 ③

10 ④ 11 ⑤ 12 4 13 ③ 14 27

15 ② 16 ③ 17 $9\le x\le 11.5$ 18 ④

19 $\frac{9}{5}$ 20 ① 21 $-1<x<\frac{2}{3}$
22 $3<x<3.6$ 23 3 24 ① 25 ④
26 ② 27 7

본책 75쪽 01 2 02 ③ 03 ②
04 ③ 05 ②

## 08 이차부등식

본책 76~78쪽 01 5 02 6 03 ④
04 9 05 $-2<x<3$ 06 ② 07 ①
08 $-1$ 09 ② 10 ④ 11 ③ 12 7
13 ③ 14 14 15 ② 16 $-3$ 17 ②
18 ①

본책 79~82쪽 01 $-1<x<2$ 02 ⑤
03 3 04 ⑤ 05 10 06 ① 07 ⑤
08 3 09 ③ 10 45 11 ③ 12 7
13 ③ 14 1 15 $-1$ 16 ① 17 ②
18 $\frac{1}{2}$ 19 $-2<x<3$ 20 6 21 ④
22 ③ 23 4 24 1 25 18 26 ④
27 ③ 28 ③ 29 ④ 30 ⑤
31 $a\le-\frac{13}{3}$ 또는 $a\ge1$

본책 83쪽 01 14 02 ④ 03 ①
04 ① 05 12 06 100 07 8

---

본책 84~87쪽 01 ④ 02 ③ 03 ④
04 ① 05 ④ 06 ③ 07 ② 08 ③
09 ③ 10 ④ 11 ③ 12 ③ 13 ②
14 ③ 15 ⑤ 16 ② 17 0 18 $3<a\le4$
19 2 20 70개 21 2 22 10 23 3
24 $-1<a\le0$ 25 5 26 3 27 $\sqrt{13}$
28 $-10$

본책 88쪽 01 ① 02 $\frac{11}{12}$ 03 ①
04 ⑤

# IV. 도형의 방정식

## 09 평면좌표와 직선의 방정식

본책 90~93쪽 01 5 02 ② 03 ④
04 ② 05 $\frac{3}{8}<k<\frac{2}{3}$ 06 ④ 07 $2\sqrt{6}$
08 5 09 ⑤ 10 $\frac{7}{2}$ 11 $y=2x+3$
12 11 13 2 14 ⑤ 15 ⑤ 16 ②
17 ② 18 5 19 $y=\sqrt{3}x-2,\ y=-\sqrt{3}x-2$
20 $(1, 1), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 21 ④ 22 ④ 23 $-11$
24 ①

본책 94~97쪽 01 ③ 02 14 03 13
04 ② 05 7 06 $\frac{3}{2}$ 07 3 08 $\frac{40}{3}$
09 12 10 $\frac{4}{3}$ 11 ③ 12 $-4$ 13 ②
14 ① 15 91 16 $\frac{6}{5}$ 17 9 18 ③
19 ③ 20 11 21 10 22 ③ 23 ②
24 5 25 ③ 26 ① 27 90 28 ②
29 ①

본책 98~99쪽 01 ④ 02 ③ 03 25
04 90 05 ③ 06 123 07 1 08 ④
09 ① 10 ② 11 $\frac{9}{4}$ 12 4

## 10 원의 방정식

본책 100~102쪽 01 ③ 02 ① 03 26
04 12 05 ⑤ 06 15 07 ① 08 ③
09 25 10 $-\sqrt{3}<m<-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 또는 $\frac{2\sqrt{5}}{5}<m<\sqrt{3}$
11 4 12 ① 13 ④ 14 $-1$ 15 ③
16 ④ 17 $3\sqrt{3}$ 18 3

본책 103~105쪽 01 $-7$ 02 ④ 03 ③
04 38 05 ④ 06 $(x+1)^2+(y-3)^2=9$
07 ④ 08 $4x+2y-1=0$ 09 ④ 10 2
11 ④ 12 ④ 13 6 14 5 15 $52\pi$

16 $\frac{21}{5}$ 17 ② 18 18 19 ④ 20 ①
21 54

본책 106쪽 01 ③ 02 ③ 03 256
04 6 05 ④ 06 320

## 11 도형의 이동

본책 108~110쪽 01 $y=\frac{1}{2}x$ 02 ⑤ 03 ①
04 ③ 05 ② 06 12 07 5 08 ③
09 ③ 10 $-2$ 11 ⑤ 12 ⑤ 13 $-2$
14 ⑤ 15 4 16 $\left(\frac{19}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ 17 ①
18 ①

본책 111~113쪽 01 ⑤ 02 18 03 ②
04 42 05 ④ 06 10 07 2 08 0
09 $-1$ 10 ④ 11 $4\sqrt{10}$ 12 ⑤ 13 $3\sqrt{2}$
14 $-3$ 15 $-5$ 16 ③ 17 6 18 $-\frac{4}{3}$
19 5 20 ② 21 $-1$ 22 8 23 ①

본책 114쪽 01 ② 02 32 03 20
04 16 05 ① 06 ④

---

본책 115~118쪽 01 ④ 02 ④ 03 ①
04 ② 05 ③ 06 ③ 07 ② 08 ④
09 ② 10 ③ 11 ⑤ 12 ② 13 ②
14 ③ 15 ③ 16 ③ 17 2 18 58
19 35 20 $\sqrt{3}$ 21 20
22 $x^2+(y+1)^2=4\,(x\neq0)$ 23 $-1$ 24 232
25 4 26 25 27 4 28 18

본책 119쪽 01 ⑤ 02 45 03 6
04 ①

"1등급을 향한 최고의 학습 시스템"
일품

# I 다항식

## 01 다항식의 연산

### 개념&핵심 기출 본책 8~10쪽

**01** ㄱ. $x^2$항, $x$항, 상수항의 순서로 정리되어 있으므로 $x$에 대하여 내림차순으로 정리되어 있다.
ㄴ. $x$에 대한 다항식에서 $a^2+3$은 상수항이므로 $x$에 대하여 내림차순으로 정리하면 $ax+a^2+3$이다.
ㄷ. $x$항, 상수항의 순서로 정리되어 있으므로 $x$에 대하여 내림차순으로 정리되어 있다.
ㄹ. $x$에 대하여 내림차순으로 정리하면
$(y^2-2)x^2+3yx$이다.
이상에서 $x$에 대하여 내림차순으로 정리한 다항식은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

$x$에 대한 다항식에서 $y^2+1$은 상수항이다.

**02** $5A-2(B+3A)$
$=5A-2B-6A$
$=-A-2B$
$=-(2x^2-4x+3)-2(3x^2+5x-4)$
$=-2x^2+4x-3-6x^2-10x+8$
$=-8x^2-6x+5$ 답 $-8x^2-6x+5$

먼저 구하는 식을 간단히 한 후 두 다항식 $A$, $B$를 대입하여 동류항끼리 모아서 정리한다.

**03** $A+B=-x^2+3xy-4y^2$ …… ㉠
$3B-2A=7x^2-xy-2y^2$ …… ㉡
㉠×3−㉡을 하면
$5A=-10x^2+10xy-10y^2$
$\therefore A=-2x^2+2xy-2y^2$
$X-2A=B$에서
$X=2A+B$
$=(A+B)+A$
$=(-x^2+3xy-4y^2)+(-2x^2+2xy-2y^2)$
$=-3x^2+5xy-6y^2$
따라서 다항식 $X$의 $xy$의 계수는 5이다. 답 ⑤

**1등급 비밀노트**
$A=-2x^2+2xy-2y^2$을 ㉠에 대입하여 $B$를 구한 후 $X=2A+B$에 $A$와 $B$를 대입하여 답을 구할 수도 있지만 위의 풀이처럼 $X=2A+B=(A+B)+A$임을 이용하면 계산 과정을 간단히 할 수 있다.

**04** $(2x+ky^2)(x^2-xy^2+2y)$의 전개식에서 $x^2y^2$항은
$2x\cdot(-xy^2)+ky^2\cdot x^2=(k-2)x^2y^2$
이때 $x^2y^2$의 계수가 3이므로
$k-2=3$ $\therefore k=5$ 답 5

필요한 항이 나오도록 각 다항식에서 하나씩 항을 선택하여 곱한다.

**05** $(x+2)(x-4)(x-2)(x+4)$
$=(x+2)(x-2)(x-4)(x+4)$
$=(x^2-4)(x^2-16)$
$=x^4-20x^2+64$
따라서 $x^2$의 계수는 $-20$이다. 답 $-20$

**06** $(a+b+c)(a-b-c)+(a+b-c)(a-b+c)$
$=\{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}$
$+\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}$
$=a^2-(b+c)^2+a^2-(b-c)^2$
$=a^2-b^2-2bc-c^2+a^2-b^2+2bc-c^2$
$=2(a^2-b^2-c^2)$
이므로 $2(a^2-b^2-c^2)=0$에서 $a^2-b^2-c^2=0$
$\therefore a^2=b^2+c^2$
따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 $a$인 직각삼각형이다. 답 ④

**07** $(x+a)^3+(2x-3)^3$
$=(x^3+3x^2a+3xa^2+a^3)$
$+(8x^3-36x^2+54x-27)$
$=9x^3+(3a-36)x^2+(3a^2+54)x+a^3-27$
이때 $x^2$의 계수가 $-42$이므로
$3a-36=-42$ $\therefore a=-2$
따라서 $x$의 계수는
$3a^2+54=3\cdot(-2)^2+54=66$ 답 ③

**08** $(2x+1)^2(4x^2-2x+1)^2$
$=\{(2x+1)(4x^2-2x+1)\}^2$
$=\{(2x)^3+1^3\}^2$
$=(8x^3+1)^2$
$=64x^6+16x^3+1$
따라서 $a=64$, $b=16$, $n=3$이므로
$a+2b+n=99$ 답 ⑤

$(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$=a^3+b^3$

**09** $(x+1)(y+1)(z+1)$
$=(1+x)(1+y)(1+z)$
$=1+(x+y+z)+(xy+yz+zx)+xyz$
$=1+1+3+5=10$ 답 10

**1등급 비밀노트**
곱셈 공식
$(x+a)(x+b)(x+c)$
$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$
를 이용하면 주어진 다항식을 쉽게 전개할 수 있다.
$(1+x)(1+y)(1+z)$
$=1^3+(x+y+z)\cdot1^2+(xy+yz+zx)\cdot1+xyz$
$=1+(x+y+z)+(xy+yz+zx)+xyz$

**10** $a+b=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$
$ab=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$

$$\begin{aligned}\therefore\ &(a+a^2+a^3)+(b+b^2+b^3)\\&=(a+b)+(a^2+b^2)+(a^3+b^3)\\&=(a+b)+\{(a+b)^2-2ab\}\\&\quad+\{(a+b)^3-3ab(a+b)\}\\&=4+(4^2-2\cdot1)+(4^3-3\cdot1\cdot4)\\&=70\end{aligned}$$

답 ③

**11** $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$이므로

$56=2^3+3ab\cdot2,\qquad 6ab=48$

$\therefore ab=8$

$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab=2^2+4\cdot8=36$이므로

$a+b=6\ (\because a+b>0)$

$$\begin{aligned}\therefore a^3+b^3&=(a+b)^3-3ab(a+b)\\&=6^3-3\cdot8\cdot6\\&=72\end{aligned}$$

답 ④

$a>0,\ b>0$이므로 $a+b>0$

**12** 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 $x$ cm, $y$ cm라 하면 직사각형의 대각선의 길이가 부채꼴의 반지름의 길이와 같으므로

$x^2+y^2=100$

또 직사각형의 둘레의 길이가 24 cm이므로

$2(x+y)=24\qquad\therefore x+y=12$

이때 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$100=12^2-2xy\qquad\therefore xy=22$

따라서 직사각형의 넓이는 22 $cm^2$이다.

답 ④

(직사각형의 넓이)
=(가로의 길이)
×(세로의 길이)
$=xy$

**13** $x\neq0$이므로 $x^2-4x-1=0$의 양변을 $x$로 나누면

$x-4-\dfrac{1}{x}=0\qquad\therefore x-\dfrac{1}{x}=4$

$$\begin{aligned}\therefore x^3-\frac{1}{x^3}&=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)\\&=4^3+3\cdot4=76\end{aligned}$$

답 ⑤

$x=0$을 $x^2-4x-1=0$에 대입하면 등식이 성립하지 않으므로 $x\neq0$이다.

**14** $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$에서

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

이때 $x+y+z\neq0$이므로

$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

$\dfrac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

$x-y=0,\ y-z=0,\ z-x=0$

$\therefore x=y=z$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\frac{(x+y)^3+(y+z)^3+(z+x)^3}{(x+y)(y+z)(z+x)}\\&=\frac{(2x)^3+(2x)^3+(2x)^3}{2x\cdot2x\cdot2x}=3\end{aligned}$$

답 3

**15** 주어진 직육면체의 가로, 세로의 길이와 높이를 각각 $x,\ y,\ z$라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 68이므로

$4(x+y+z)=68$

$\therefore x+y+z=17$

대각선의 길이가 10이므로

$x^2+y^2+z^2=100$

따라서 직육면체의 겉넓이는

$$\begin{aligned}2(xy+yz+zx)&=(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\\&=17^2-100\\&=189\end{aligned}$$

답 ⑤

다항식의 나눗셈을 할 때는 차수를 맞춰서 계산하고 해당 차수의 항이 없는 부분은 비워 둔다.

**16**

$$\begin{array}{r} 3x-2\phantom{+3} \\ x^2+2\,\overline{)\,3x^3-2x^2\phantom{-6x}+3} \\ \underline{3x^3\phantom{-2x^2}+6x\phantom{+3}} \\ -2x^2-6x+3 \\ \underline{-2x^2\phantom{-6x}-4} \\ -6x+7 \end{array}$$

$\therefore Q(x)=3x-2,\ R(x)=-6x+7$

이때 $3x-2=-\dfrac{1}{2}(-6x+7)+\dfrac{3}{2}$이므로 구하는 나머지는 $\dfrac{3}{2}$이다.

답 $\dfrac{3}{2}$

$A=BQ+R$에서 $R$가 상수이거나 $R$의 차수가 $B$의 차수보다 작으면 $A$를 $B$로 나누었을 때의 몫은 $Q$, 나머지는 $R$이다.

**17** 주어진 등식에서 다항식 $2x^4+4x^3+3x^2+7x-1$을 $2x^2+5$로 나누었을 때의 몫이 $P(x)$, 나머지가 $ax+4$이다.

$$\begin{array}{r} x^2+2x-1\phantom{+7x-1} \\ 2x^2+5\,\overline{)\,2x^4+4x^3+3x^2+7x-1} \\ \underline{2x^4\phantom{+4x^3}+5x^2\phantom{+7x-1}} \\ 4x^3-2x^2+7x\phantom{-1} \\ \underline{4x^3\phantom{-2x^2}+10x\phantom{-1}} \\ -2x^2-3x-1 \\ \underline{-2x^2\phantom{-3x}-5} \\ -3x+4 \end{array}$$

따라서 $P(x)=x^2+2x-1,\ a=-3$이므로

$$\begin{aligned}P(a)&=P(-3)\\&=(-3)^2+2\cdot(-3)-1\\&=2\end{aligned}$$

답 ②

**18** 다항식 $x^3-4x+a$를 $x^2-3x+b$로 나누면

$$\begin{array}{r} x+3\phantom{-4x+a} \\ x^2-3x+b\,\overline{)\,x^3\phantom{-3x^2}-4x+a} \\ \underline{x^3-3x^2\phantom{-4}+bx\phantom{+a}} \\ 3x^2-(4+b)x+a \\ \underline{3x^2-\phantom{(4+}9x+3b} \\ (5-b)x+a-3b \end{array}$$

이때 나머지가 0이므로

$5-b=0,\ a-3b=0$

$\therefore a=15,\ b=5$

$\therefore a+b=20$

답 20

## 1등급을 위한 고난도 문제

본책 11~13쪽

**01** 다항식 $2a+x^3-3ax+6+3x^2+7x$를 $x$에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^3+3x^2+(7-3a)x+2a+6$ ···➊

이때 $x$의 계수가 $-2$이므로

$7-3a=-2 \qquad \therefore a=3$ ···➋

따라서 상수항은

$2a+6=2\cdot3+6=12$ ···➌

답 12

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ 주어진 다항식을 $x$에 대하여 내림차순으로 정리할 수 있다. | 30 % |
| ➋ $a$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ➌ 상수항을 구할 수 있다. | 30 % |

**02** $2(A-B)-\{B-3(C-A)\}$

$=2A-2B-B+3C-3A$

$=-A-3B+3C$

$=-(-2x^2+5x-4)-3(3x^2-2x-1)$
$\quad+3(4x^2+x-3)$

$=2x^2-5x+4-9x^2+6x+3+12x^2+3x-9$

$=5x^2+4x-2$

답 ③

**03** $A+2B$

$=(ax^2+bxy+ay^2)+2(x^2+2xy+3y^2)$

$=(a+2)x^2+(b+4)xy+(a+6)y^2$ ······ ㉠

$2A-C=2(ax^2+bxy+ay^2)-(6x^2+xy-2y^2)$

$=(2a-6)x^2+(2b-1)xy+(2a+2)y^2$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 항이 각각 두 개이려면 각 다항식에서 $x^2$, $xy$, $y^2$의 계수 중 하나씩만 0이어야 한다.

그런데 $a$, $b$는 정수이므로 ㉡에서 $2b-1\neq0$이다.

따라서 $2a-6=0$ 또는 $2a+2=0$이므로

$a=3$ 또는 $a=-1$

이고 ㉠에서 $a=3$, $a=-1$일 때 $a+2\neq0$, $a+6\neq0$이므로 $b+4=0$이어야 한다.

즉 $b=-4$이고, $ab<0$이므로 $\quad a=3$

$\therefore a^2+b^2=3^2+(-4)^2=25$

답 25

**04** $(x^2+ax+6)(x^2+bx-2)$의 전개식에서

$x^3$항은 $\quad x^2\cdot bx+ax\cdot x^2=(a+b)x^3$

$x^2$항은 $\quad x^2\cdot(-2)+ax\cdot bx+6\cdot x^2=(ab+4)x^2$

이때 $x^3$의 계수와 $x^2$의 계수가 모두 0이므로

$a+b=0,\ ab+4=0$

$b=-a$를 $ab+4=0$에 대입하면

$-a^2+4=0, \quad a^2=4 \quad \therefore a=\pm2$

$\therefore a=-2,\ b=2$ 또는 $a=2,\ b=-2$

그런데 $a>b$이므로 $\quad a=2,\ b=-2$

따라서 주어진 다항식의 전개식에서 $x$항은

$ax\cdot(-2)+6\cdot bx=(-2a+6b)x$

이므로 $x$의 계수는

$-2a+6b=-2\cdot2+6\cdot(-2)=-16$

답 ①

**05** $P(x)=(2x-3)(x^2+ax+a)$라 하면 다항식 $P(x)$의 $x$에 대한 모든 항의 계수와 상수항의 합은 $P(1)$의 값과 같으므로 $P(1)=15$에서

$-(2a+1)=15 \qquad \therefore a=-8$ ···➊

따라서 $P(x)$의 전개식에서 $x^2$항은

$2x\cdot ax-3\cdot x^2=(2a-3)x^2$ ···➋

이므로 $x^2$의 계수는

$2a-3=2\cdot(-8)-3=-19$ ···➌

답 $-19$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ $a$의 값을 구할 수 있다. | 50 % |
| ➋ 전개식에서 $x^2$항을 구할 수 있다. | 30 % |
| ➌ $x^2$의 계수를 구할 수 있다. | 20 % |

**1등급 비밀노트**

$x$에 대한 $n$차 다항식 $P(x)$가

$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$

일 때, $x$에 대한 모든 항의 계수와 상수항의 합 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$의 값은 $P(1)$의 값과 같다. 즉 $P(x)$에서 $x$ 대신 1을 대입한 값과 같다.

**06** $H(x)=P(x)-Q(x)$라 하면

$H(x)=-x^2-4ax+3a^2-(-2x^2+2bx-b^2)$

$=x^2-(4a+2b)x+3a^2+b^2$

$\therefore P(a+b)-Q(a+b)$

$=H(a+b)$

$=(a+b)^2-(4a+2b)(a+b)+3a^2+b^2$

$=a^2+2ab+b^2-(4a^2+6ab+2b^2)+3a^2+b^2$

$=-4ab=-4\cdot3=-12$

답 $-12$

**07** $(x+x^2+x^3+x^5)^3$

$=\underbrace{(x+x^2+x^3+x^5)}_{㉠}\underbrace{(x+x^2+x^3+x^5)}_{㉡}\underbrace{(x+x^2+x^3+x^5)}_{㉢}$

$(x+x^2+x^3+x^5)^3$을 전개하기 위하여 다항식 ㉠, ㉡, ㉢에서 택한 항을 순서대로

$x^a,\ x^b,\ x^c$ ($a$, $b$, $c$는 1 또는 2 또는 3 또는 5)

이라 하자.

ㄱ. $x^{14}$항이 나오는 경우는 $a+b+c=14$일 때이고, 이것을 만족시키는 $a$, $b$, $c$는 존재하지 않는다. 따라서 $x^{14}$의 계수는 0이다.

일품 BOX

$a=-2$, $a=2$를 각각 $b=-a$에 대입하여 $b$의 값을 구한다.

항은 다항식을 이루고 있는 각각의 단항식이다.

$b<0$, $ab<0$이므로 $a>0$

ㄴ. $x^9$항이 나오는 경우는 $a+b+c=9$일 때이고, 이것을 만족시키는 순서쌍 $(a, b, c)$는
$(1, 3, 5), (1, 5, 3), (3, 1, 5),$
$(3, 5, 1), (5, 1, 3), (5, 3, 1),$
$(2, 2, 5), (2, 5, 2), (5, 2, 2),$
$(3, 3, 3)$
의 10개이다. 그런데 각 경우의 계수는 모두 1이므로 $x^9$의 계수는 10이다.

$1+3+5=9$, $2+2+5=9$, $3+3+3=9$

ㄷ. 모든 항의 계수의 합은 $(x+x^2+x^3+x^5)^3$에 $x=1$을 대입한 값과 같다.
따라서 구하는 합은 $4^3=64$
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

**08** (i) $n$이 홀수일 때,
(주어진 식)
$=\left(-\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)$
$=-b\cdot b=-b^2$
(ii) $n$이 짝수일 때,
(주어진 식)
$=\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)\left(-\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)$
$=b\cdot(-b)=-b^2$
(i), (ii)에서 주어진 식을 간단히 하면 $-b^2$이다. 답 ②

**1등급 비밀노트**
$n$이 자연수일 때, $(-a)^n\ (a>0)$ 꼴은 $n$이 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나누어 생각한다.

**09** $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{yz-zx-xy}{xyz}=\frac{1}{2}$이므로
$xyz=2(yz-zx-xy)$ ...... ㉠
$\therefore (x-2)(y+2)(z+2)$
$=(-2+x)(-2-y)(-2-z)$
$=(-2)^3+(x-y-z)\cdot(-2)^2$
$+(-xy+yz-zx)\cdot(-2)+xyz$
$=xyz-2(yz-zx-xy)+4(x-y-z)-8$
$=4(x-y-z)-8\ (\because ㉠)$
$=4\cdot4-8=8$ 답 ⑤

**10** $40^2=(32+8)^2=32^2+2\cdot32\cdot8+8^2$이므로
$p=2\cdot32\cdot8=512$ ··· ❶
$40^2=(24+8+8)^2$
$=24^2+8^2+8^2+2(24\cdot8+8\cdot8+8\cdot24)$
이므로
$q=2(24\cdot8+8\cdot8+8\cdot24)=896$ ··· ❷
$\therefore 3p-q=1536-896=640$ ··· ❸
답 640

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b+c)^2$
$=a^2+b^2+c^2$
$+2(ab+bc+ca)$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $p$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❷ $q$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❸ $3p-q$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

다른 풀이 $32^2+8^2+512=24^2+8^2+8^2+q$에서
$32^2=(24+8)^2=24^2+2\cdot24\cdot8+8^2$이므로
$(24^2+2\cdot24\cdot8+8^2)+8^2+512$
$=24^2+8^2+8^2+q$
$\therefore q=2\cdot24\cdot8+512=896$

$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
$=a^4+a^2b^2+b^4$

**11** $A=(1+x+x^2)(1-x+x^2)$
$+(1-x)(1+x)(1+x^2)$
$=(1+x^2+x^4)+(1-x^2)(1+x^2)$
$=(1+x^2+x^4)+(1-x^4)=2+x^2$
이므로 $A^2=(2+x^2)^2=4+4x^2+x^4$
따라서 $A^2$의 전개식에서 $x^2$의 계수는 4이다. 답 ②

**12** $A+2B=2x^2+5x+6$ ...... ㉠
$2A-B=-x^2-8$ ...... ㉡
㉠+㉡×2를 하면
$5A=5x-10\quad \therefore A=x-2$ ··· ❶
$A=x-2$를 ㉡에 대입하면
$2(x-2)-B=-x^2-8$
$\therefore B=x^2+2x+4$ ··· ❷

$(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$=a^3-b^3$

$AB=(x-2)(x^2+2x+4)=x^3-8$이므로
$(AB)^3=(x^3-8)^3$
$=x^9-24x^6+192x^3-512$ ··· ❸
따라서 $(AB)^3$의 전개식에서 상수항을 제외한 모든 항의 계수의 합은
$1+(-24)+192=169$ ··· ❹
답 169

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $A$를 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $B$를 구할 수 있다. | 30 % |
| ❸ $(AB)^3$을 전개할 수 있다. | 20 % |
| ❹ 상수항을 제외한 모든 항의 계수의 합을 구할 수 있다. | 20 % |

**13** $(1-2x+3x^2-4x^3)^3=1+\cdots+ax^7+bx^8-64x^9$
이고
$\{(x-2)(1-2x+3x^2-4x^3)\}^3$
$=(x-2)^3(1-2x+3x^2-4x^3)^3$
$=(x^3-6x^2+12x-8)(1-2x+3x^2-4x^3)^3$
이므로 $\{(x-2)(1-2x+3x^2-4x^3)\}^3$의 전개식에서 $x^{10}$항은
$x^3\cdot ax^7-6x^2\cdot bx^8+12x\cdot(-64x^9)$
$=(a-6b-768)x^{10}$
따라서 $x^{10}$의 계수는 $a-6b-768$이다. 답 ④

**14** $x+\dfrac{1}{x}=1$의 양변에 $x$를 곱하면

$x^2+1=x \qquad \therefore x^2-x+1=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\therefore P(n)=(1+x^2)^n+(1-x)^n=x^n+(-x^2)^n$

> $x^2-x+1=0$에서
> $x^2-x=-1$,
> $1+x^2=x$,
> $1-x=-x^2$

㉠의 양변에 $x+1$을 곱하면

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

$x^3+1=0 \qquad \therefore x^3=-1$

따라서 $x^4=-x$, $x^5=-x^2$, $x^6=1$이므로 $P(n)$의 값은 다음과 같다.

> $x^3=-1$의 양변에 $x$, $x^2$, $x^3$을 각각 곱하면
> $x^4=-x$,
> $x^5=-x^2$,
> $x^6=-x^3=1$

$P(1)=x-x^2=1$

$P(2)=x^2+x^4=x^2-x=-1$

$P(3)=x^3-x^6=-1-1=-2$

$P(4)=x^4+x^8=x^4+x^6\cdot x^2=-x+x^2=-1$

$P(5)=x^5-x^{10}=x^5-x^6\cdot x^4=-x^2+x=1$

$P(6)=x^6+x^{12}=x^6+(x^6)^2=1+1=2$

$P(7)=x^7-x^{14}=x^6\cdot x-(x^6)^2\cdot x^2=x-x^2=1$

$\vdots$

즉 자연수 $k$에 대하여

$P(6k-5)+P(6k-4)+P(6k-3)$
$+P(6k-2)+P(6k-1)+P(6k)$
$=1-1-2-1+1+2=0$

이때 $2000=6\cdot 333+2$이므로

$P(1)+P(2)+P(3)+\cdots+P(2000)$
$=\{P(1)+P(2)+P(3)+\cdots+P(1998)\}$
$+P(1999)+P(2000)$
$=0+1-1=0$

답 0

**1등급 비밀노트**

$x^6=1$이므로 자연수 $k$에 대하여

$x=x^7=x^{13}=\cdots=x^{6k-5}$,
$x^2=x^8=x^{14}=\cdots=x^{6k-4}$,
$\vdots$
$1=x^6=x^{12}=\cdots=x^{6k}$

즉 $x^n$($n$은 자연수)은 $x$, $x^2$, $-1$, $-x$, $-x^2$, 1이 차례대로 반복되므로 $P(n)=x^n+(-x^2)^n$에서

$P(1)=P(7)=P(13)=\cdots=P(6k-5)=1$,
$P(2)=P(8)=P(14)=\cdots=P(6k-4)=-1$,
$\vdots$
$P(6)=P(12)=\cdots=P(6k)=2$

따라서 $P(n)=x^n+(-x^2)^n$의 값은 1, $-1$, $-2$, $-1$, 1, 2가 차례대로 반복된다.

**15** $ax+by=p$, $bx+ay=q$라 하면

$p+q=(ax+by)+(bx+ay)$
$=a(x+y)+b(x+y)$
$=(x+y)(a+b)=2\cdot 4=8$

$pq=(ax+by)(bx+ay)$
$=abx^2+(a^2+b^2)xy+aby^2$
$=ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$
$=\{(x+y)^2-2xy\}-\{(a+b)^2-2ab\}$
$=\{2^2-2\cdot(-1)\}-(4^2-2\cdot 1)=-8$

$\therefore (ax+by)^3+(bx+ay)^3$
$=p^3+q^3=(p+q)^3-3pq(p+q)$
$=8^3-3\cdot(-8)\cdot 8=704$

답 ④

**16** $\overline{AD}=a$, $\overline{DC}=b$, $\overline{CE}=c$라 하면 직사각형 ABCD의 넓이가 96이므로

$ab=96$ ··· ❶

$\overline{AD}+\overline{DC}+\overline{CE}=23$에서

$a+b+c=23 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\overline{AB}+\overline{BE}=17$에서

$b+(a-c)=17 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

> $\overline{BE}=\overline{BC}-\overline{CE}$
> $=a-c$

㉠+㉡을 하면

$2(a+b)=40$

$\therefore a+b=20$ ··· ❷

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(a+b)^2-2ab}$
$=\sqrt{20^2-2\cdot 96}=4\sqrt{13}$ ··· ❸

답 $4\sqrt{13}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $ab$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |
| ❷ $a+b$의 값을 구할 수 있다. | 50 % |
| ❸ 대각선 AC의 길이를 구할 수 있다. | 30 % |

**17** $\dfrac{x^6+x^5+x^4+x^3-x^2+x-1}{x^3}$

$=\left(x^3-\dfrac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+1 \cdots$ ㉠

한편 $x\neq 0$이므로 $x^2-3x+1=0$의 양변을 $x$로 나누면

$x-3+\dfrac{1}{x}=0$

$\therefore x+\dfrac{1}{x}=3$

$\therefore x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$
$=3^2-2=7$

$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4=3^2-4=5$이므로

$x-\dfrac{1}{x}=-\sqrt{5}\ \left(\because x-\dfrac{1}{x}<0\right)$

> $0<x<1$에서 $\dfrac{1}{x}>1$, 즉
> $-\dfrac{1}{x}<-1$이므로
> $x-\dfrac{1}{x}<0$

$\therefore x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$
$=(-\sqrt{5})^3+3\cdot(-\sqrt{5})$
$=-8\sqrt{5}$

따라서 ㉠에서

$\dfrac{x^6+x^5+x^4+x^3-x^2+x-1}{x^3}$
$=-8\sqrt{5}+7-\sqrt{5}+1$
$=8-9\sqrt{5}$

즉 $a=8$, $b=-9$이므로

$a-b=17$

답 ③

**18** $x^4+y^4+z^4$

$=(x^2)^2+(y^2)^2+(z^2)^2$

$=(x^2+y^2+z^2)^2-2\{(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2\}$ …… ㉠

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$이므로

$0=6+2(xy+yz+zx)$

$\therefore xy+yz+zx=-3$

따라서

$(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2$

$=(xy+yz+zx)^2-2(xy\cdot yz+yz\cdot zx+zx\cdot xy)$

$=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)$

$=(-3)^2-0=9$

이므로 ㉠에서

$x^4+y^4+z^4=6^2-2\cdot 9=18$

답 18

**19** $a-b=3+\sqrt{3}$, $b-c=3-\sqrt{3}$에서

$c-a=-6$ ··· ❶

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$ ··· ❷

$=\frac{1}{2}\{(3+\sqrt{3})^2+(3-\sqrt{3})^2+(-6)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{(9+6\sqrt{3}+3)+(9-6\sqrt{3}+3)+36\}$

$=30$ ··· ❸

답 30

$\begin{cases} a-b=3+\sqrt{3} & \cdots ㉠ \\ b-c=3-\sqrt{3} & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면

$a-c=6$

$\therefore c-a=-6$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $c-a$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$를 변형할 수 있다. | 30 % |
| ❸ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |

**20** $P(x)=(x+2)(x^2+3x-1)-4$

$=x^3+5x^2+5x-6$

이므로 다항식 $P(x)$를 $x^2+1$로 나누면

$$\begin{array}{r}
x+5 \\
x^2+1\,\overline{)\,x^3+5x^2+5x-6} \\
\underline{x^3\qquad\;\;+x\qquad} \\
5x^2+4x-6 \\
\underline{5x^2\qquad\;\;+5} \\
4x-11
\end{array}$$

따라서 다항식 $P(x)$를 $x^2+1$로 나누었을 때의 나머지는 $4x-11$이다.

답 ④

**21** $x^4+2x^3-8x-13$

$=P(x)(x^2+4x+12)+32x+35$

이므로

$x^4+2x^3-40x-48=P(x)(x^2+4x+12)$

다항식 $x^4+2x^3-40x-48$을 $x^2+4x+12$로 나누면

다항식 $x^4+2x^3-40x-48$은 $x^2+4x+12$로 나누어떨어진다.

$$\begin{array}{r}
x^2-2x-4 \\
x^2+4x+12\,\overline{)\,x^4+2x^3\qquad\qquad-40x-48} \\
\underline{x^4+4x^3+12x^2\qquad\qquad\qquad} \\
-2x^3-12x^2-40x\qquad \\
\underline{-2x^3-8x^2-24x\qquad} \\
-4x^2-16x-48 \\
\underline{-4x^2-16x-48} \\
0
\end{array}$$

따라서 $P(x)=x^2-2x-4$이므로

$a=-2,\ b=-4 \qquad \therefore ab=8$

답 8

**22** $Q(x)=(x-2)\cdot x+4=x^2-2x+4$이므로

$x^4-x^2+5x-2=P(x)(x^2-2x+4)-5x+2$

$\therefore x^4-x^2+10x-4=P(x)(x^2-2x+4)$

다항식 $x^4-x^2+10x-4$를 $x^2-2x+4$로 나누면

$$\begin{array}{r}
x^2+2x-1 \\
x^2-2x+4\,\overline{)\,x^4\qquad\;\;-x^2+10x-4} \\
\underline{x^4-2x^3+4x^2\qquad\qquad} \\
2x^3-5x^2+10x\quad \\
\underline{2x^3-4x^2+8x\quad} \\
-x^2+2x-4 \\
\underline{-x^2+2x-4} \\
0
\end{array}$$

따라서 $P(x)=x^2+2x-1$이므로

$P(x)-Q(x)=(x^2+2x-1)-(x^2-2x+4)$

$=4x-5$

답 ③

**23** 다항식 $x^4+(a^2-a-1)x^2+(-a^2+b)x+b^3$을 $x^2-x-a$로 나누면

$$\begin{array}{r}
x^2+x+a^2 \\
x^2-x-a\,\overline{)\,x^4\qquad+(a^2-a-1)x^2+(-a^2+b)x+b^3} \\
\underline{x^4-x^3\qquad-ax^2\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
x^3+\quad(a^2-1)x^2+(-a^2+b)x\qquad \\
\underline{x^3\qquad\qquad-x^2\qquad\qquad-ax\qquad} \\
a^2x^2+(-a^2+a+b)x+b^3 \\
\underline{a^2x^2\qquad\qquad-a^2x-a^3} \\
(a+b)x+a^3+b^3
\end{array}$$

··· ❶

이때 나머지가 $2x+26$이므로

$a+b=2,\ a^3+b^3=26$ ··· ❷

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$에서

$26=2^3-3ab\cdot 2$

$\therefore ab=-3$ ··· ❸

답 $-3$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 주어진 다항식을 $x^2-x-a$로 나눌 수 있다. | 50 % |
| ❷ $a+b$, $a^3+b^3$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |
| ❸ $ab$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |

**24** 다항식 $P(x)$를 $(2x-1)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고

$$8x^2+a=2(2x-1)^2+8x+a-2$$

이므로

$$\begin{aligned}P(x)&=(2x-1)^3Q(x)+8x^2+a\\&=(2x-1)^2(2x-1)Q(x)\\&\quad+\{2(2x-1)^2+8x+a-2\}\\&=\underline{(2x-1)^2\{(2x-1)Q(x)+2\}}\\&\quad\underline{+8x+a-2}\end{aligned}$$

> $P(x)$를 $(2x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫은 $\{(2x-1)Q(x)+2\}$, 나머지는 $8x+a-2$이다.

이때 $P(x)$를 $(2x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $bx+5$이므로

$8=b$, $a-2=5$ $\quad\therefore a=7$, $b=8$

$\therefore a+b=15$ 답 ③

다른 풀이 다항식 $P(x)$를 $(2x-1)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$P(x)=(2x-1)^3Q(x)+8x^2+a$$

이때 $(2x-1)^3Q(x)$는 $(2x-1)^2$으로 나누어떨어지므로 다항식 $P(x)$를 $(2x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 다항식 $8x^2+a$를 $(2x-1)^2$, 즉 $4x^2-4x+1$로 나누었을 때의 나머지와 같다.

$$\begin{array}{r} 2\phantom{xxxxxxx}\\ 4x^2-4x+1\,\big)\,\overline{8x^2\phantom{-8x}+a}\\ \underline{8x^2-8x+2}\\ 8x+a-2\end{array}$$

이때 $P(x)$를 $(2x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $bx+5$이므로 $\quad 8=b$, $a-2=5$

$\therefore a=7$, $b=8$ $\quad\therefore a+b=15$

## 사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 14쪽

**01** $\overline{AM}=a$, $\overline{AB}=b$라 하면

$\overline{AM}+\overline{MG}=a+\underline{\frac{2}{3}}b=x+y+4$

> $\overline{BC}$의 중점을 N이라 하면 $\overline{MG}:\overline{GN}=2:1$ 이므로 $\overline{MG}=\frac{2}{3}\overline{MN}=\frac{2}{3}\overline{AB}$

$\therefore 3a+2b=3x+3y+12$ ...... ㉠

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=b+2a+b=2x+3y+9$

$\therefore 2a+2b=2x+3y+9$ ...... ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $\quad a=x+3$

㉠에 $a=x+3$을 대입하면

$3(x+3)+2b=3x+3y+12$

$2b=3y+3$ $\quad\therefore b=\frac{3}{2}(y+1)$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle GBC&=\frac{1}{3}\triangle MBC=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot b=\frac{1}{3}ab\\&=\frac{1}{3}(x+3)\cdot\frac{3}{2}(y+1)\\&=\frac{1}{2}(x+3)(y+1)\end{aligned}$$

답 ①

**02** 조건 (나)에서

$$\begin{aligned}&P(a,\ a,\ a)+P(b,\ b,\ b)+P(c,\ c,\ c)\\&=(a^2+a^2+a^2-5)+(b^2+b^2+b^2-5)+(c^2+c^2+c^2-5)\\&=3(a^2+b^2+c^2)-15=93\end{aligned}$$

이므로

$a^2+b^2+c^2=36$ ...... ㉠

조건 (다)에서

$$\begin{aligned}&P(a,\ 1,\ 1)+P(1,\ b,\ 1)+P(1,\ 1,\ c)\\&=(a+1+a-5)+(b+b+1-5)+(1+c+c-5)\\&=2(a+b+c)-12=4\end{aligned}$$

이므로

$a+b+c=8$ ...... ㉡

한편 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로 ㉠, ㉡에서

$8^2=36+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=14$ ...... ㉢

이때

$$\begin{aligned}&P(ab,\ ab,\ ab)+P(bc,\ bc,\ bc)+P(ca,\ ca,\ ca)\\&=3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-15\end{aligned}$$ ...... ㉣

이고

$$\begin{aligned}&a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\\&=(ab+bc+ca)^2-2(ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab)\\&=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)\\&=14^2-2\cdot 3\cdot 8\ (\because ㉡,\ ㉢)\\&=148\end{aligned}$$

이므로 ㉣에서

$$\begin{aligned}&P(ab,\ ab,\ ab)+P(bc,\ bc,\ bc)+P(ca,\ ca,\ ca)\\&=3\cdot 148-15=429\end{aligned}$$

답 429

**03** 세 정삼각형 OAB, OCD, OEF의 한 변의 길이를 각각 $a$, $b$, $c$라 하면 세 정삼각형의 둘레의 길이의 합이 36이므로

$3a+3b+3c=36$

$\therefore a+b+c=12$

세 정삼각형의 넓이의 합이 $24\sqrt{3}$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{\sqrt{3}}{4}b^2+\frac{\sqrt{3}}{4}c^2=24\sqrt{3}$

$\therefore a^2+b^2+c^2=96$

이때 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$96=12^2-2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=24$

한편 $\underline{\angle BOC=\angle DOE=\angle FOA=60^\circ}$이므로 세 삼각형 OBC, ODE, OFA의 넓이의 합은

> $\angle BOC$, $\angle FOE$는 맞꼭지각이므로 $\angle BOC=\angle FOE=60^\circ$ 같은 방법으로 $\angle DOE=60^\circ$, $\angle FOA=60^\circ$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}ab\sin 60^\circ+\frac{1}{2}bc\sin 60^\circ+\frac{1}{2}ca\sin 60^\circ\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}(ab+bc+ca)\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 24=6\sqrt{3}\end{aligned}$$

> 두 변의 길이가 $a$, $b$이고 그 끼인각의 크기가 $\theta$인 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$ (단, $0^\circ<\theta<90^\circ$)

답 ①

**04** ㄱ. $A=BQ+R$에서

$D(A)=D(B)+D(Q)$

이므로 $D(Q)=D(A)-D(B)=m-n$

ㄴ. $A=x^2+x+1$, $B=x^2+1$이면

$x^2+x+1=(x^2+1)\cdot 1+x$

이므로 $Q=1$, $R=x$이다.

즉 $m=n=2$이고 $D(Q)=0$이지만 $D(R)=1\neq 0$이다.

ㄷ. $m\geq n$인 두 자연수 $m$, $n$에 대하여 $m+n=5$이므로

$m=4$, $n=1$ 또는 $m=3$, $n=2$

(i) $m=4$, $n=1$일 때,

$D(Q)=3$이고, $D(Q)+D(R)=3$이므로

$D(R)=0$

$\therefore m+D(R)=4$

(ii) $m=3$, $n=2$일 때,

$D(Q)=1$이고, $D(Q)+D(R)=3$이므로

$D(R)=2$

그런데 $R$는 상수이거나

($R$의 차수)<($B$의 차수)

이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $m+D(R)=4$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

ㄱ에서 $D(Q)=m-n$

$D(B)=2$이므로 $D(R)=0$ 또는 $D(R)=1$ 이어야 한다.

**05** [그림 2]의 4개의 정육면체의 부피의 합은

$2x^3+2y^3=2(x^3+y^3)$ …… ㉠

[그림 1]의 5개의 직사각형의 넓이의 합을 $S_1$이라 하면

$S_1=xy+2(x^2+y^2)$

한편 [그림 2]의 4개의 정육면체의 겉넓이의 합을 $S_2$라 하면

$S_2=2\cdot 6x^2+2\cdot 6y^2=12(x^2+y^2)$

이때 $S_2=\frac{36}{7}S_1$이므로 $7S_2=36S_1$에서

$7\cdot 12(x^2+y^2)=36\{xy+2(x^2+y^2)\}$

$7(x^2+y^2)=3xy+6(x^2+y^2)$

$\therefore x^2+y^2=3xy$ …… ㉡

한편 [그림 2]의 4개의 정육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 240이므로

$2\cdot 12x+2\cdot 12y=240$, $24(x+y)=240$

$\therefore x+y=10$ …… ㉢

㉡에서 $(x+y)^2-2xy=3xy$이므로

$(x+y)^2=5xy$, $10^2=5xy$ ($\because$ ㉢)

$\therefore xy=20$

따라서

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=10^3-3\cdot 20\cdot 10=400$

이므로 ㉠에서 구하는 합은

$2x^3+2y^3=2\cdot 400=800$ 답 800

정육면체의 모서리의 개수는 12이다.

# 02 나머지정리와 인수분해

## 개념&핵심 기출 본책 16~18쪽

**01** 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$ax^4+(-6a+b)x^2+9a-b+c=x^4-5x^2+12$

위의 등식이 $x$에 대한 항등식이므로

$a=1$, $-6a+b=-5$, $9a-b+c=12$

$\therefore a=1$, $b=1$, $c=4$

$\therefore a+b+c=6$ 답 6

다른 풀이 주어진 등식이 $x$에 대한 항등식이므로 양변에 $x^2=2$를 대입하면

$a+b+c=2^2-5\cdot 2+12=6$

**1등급 비밀노트**

주어진 등식은 차수가 짝수인 항과 상수항으로만 이루어진 항등식이므로 양변에 $x^2=2$를 대입하여 등식이 성립함을 이용할 수 있다.

**02** 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$6=2b$ $\therefore b=3$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$4-9+6=-c$ $\therefore c=-1$

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$16-18+6=2a$ $\therefore a=2$

$\therefore a+b+c=4$ 답 4

**03** $x^3+2x^2+ax+b$

$=(x+2)^2(x+c)+2$

$=(x^2+4x+4)(x+c)+2$

$=x^3+(c+4)x^2+(4c+4)x+4c+2$

위의 등식이 $x$에 대한 항등식이므로

$c+4=2$, $4c+4=a$, $4c+2=b$

$\therefore a=-4$, $b=-6$, $c=-2$

따라서 $P(x)=x^3+2x^2-4x-6$이므로

$P(c+3)=P(1)$

$=1+2-4-6=-7$ 답 ①

다항식을 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 상수이거나 일차식이므로 $ax+b$ ($a$, $b$는 상수)로 놓는다.

**04** $P(x)$를 $x^2-2x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ ($a$, $b$는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-2x-3)Q(x)+ax+b$

$=(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$

이때 나머지정리에 의하여 $P(-1)=3$, $P(3)=23$이므로 $-a+b=3$, $3a+b=23$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=8$

따라서 구하는 나머지는 $5x+8$이다. 답 ④

$P(-2)=0$, $P(5)=0$이므로 $P(x)$는 $x+2$, $x-5$로 각각 나누어떨어진다.

**05** $x^3$의 계수가 1인 삼차식 $P(x)$에 대하여 $P(a)=0$을 만족시키는 실수 $a$의 값이 $-2$와 5뿐이므로

$P(x)=(x+2)^2(x-5)$ 또는

$P(x)=(x+2)(x-5)^2$

그런데 $P(x)$의 상수항은 음수이므로

$P(x)=(x+2)^2(x-5)$

따라서 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(1)=3^2\cdot(-4)=-36$ 답 $-36$

**06** 주어진 조립제법을 완성하면 오른쪽과 같으므로

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 4 & -3 & 1 & 2 \\ & & -2 & \frac{5}{2} & -\frac{7}{4} \\ \hline & 4 & -5 & \frac{7}{2} & \boxed{\frac{1}{4}} \end{array}$$

$4x^3-3x^2+x+2$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(4x^2-5x+\frac{7}{2}\right)+\frac{1}{4}$

$=(2x+1)\left(2x^2-\frac{5}{2}x+\frac{7}{4}\right)+\frac{1}{4}$

따라서 $a=\frac{7}{2}$이고, 몫의 상수항은 $\frac{7}{4}$이므로 구하는 합은

$\frac{7}{2}+\frac{7}{4}=\frac{21}{4}$ 답 $\frac{21}{4}$

**07** $(n+3)^3+3(n+3)^2+3(n+3)+1$

$=\{(n+3)+1\}^3=(n+4)^3$

이므로 $(n+4)^3\le 1000$에서

$n+4\le 10$ $\therefore n\le 6$

따라서 자연수 $n$은 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$1+2+3+4+5+6=21$ 답 ③

$n+3=a$라 하면 주어진 식은

$a^3+3a^2+3a+1$

$=(a+1)^3$

$=\{(n+3)+1\}^3$

**08** $27x^3-64y^6=(3x)^3-(4y^2)^3$

$=(3x-4y^2)(9x^2+12xy^2+16y^4)$

이므로 $27x^3-64y^6$의 인수 중에서 $9x^2+pxy^2+qy^4$이 될 수 있는 것은 $9x^2+12xy^2+16y^4$이다.

따라서 $p=12$, $q=16$이므로

$p+q=28$ 답 28

**09** $51=a$라 하면

$\frac{51^4+51^2+1}{51^2+52}=\frac{a^4+a^2\cdot 1^2+1^4}{a^2+a+1}$

$=\frac{(a^2+a+1)(a^2-a+1)}{a^2+a+1}$

$=a^2-a+1$

$=(a-1)^2+a$

$=50^2+51$

이므로 $k=51$ 답 ③

$a^4+a^2b^2+b^4$

$=(a^2+ab+b^2)$

$\times(a^2-ab+b^2)$

**10** $x^2+5x=X$로 놓으면

(주어진 식) $=(X+4)(X+6)-24$

$=X^2+10X$

$=X(X+10)$

$=(x^2+5x)(x^2+5x+10)$

$=x(x+5)(x^2+5x+10)$

따라서 $a=5$, $b=5$, $c=10$이므로

$a+b+c=20$ 답 ①

**11** $x^4+2x^2+9=(x^4+6x^2+9)-4x^2$

$=(x^2+3)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

따라서

$P(x)=x^2+2x+3$, $Q(x)=x^2-2x+3$ 또는

$P(x)=x^2-2x+3$, $Q(x)=x^2+2x+3$

이므로

$P(1)+Q(1)=8$ 답 ②

$P(1)=6$, $Q(1)=2$ 또는 $P(1)=2$, $Q(1)=6$ 이다.

**1등급 비밀노트**

복이차식에서 완전제곱식 꼴을 만들 때, $x^4$항과 상수항을 기준으로 생각한다. 즉

$x^4+2x^2+9=\{(x^2)^2+\square x^2+3^2\}-\triangle x^2$

에서 $\square$는 $2\cdot 3=6$이어야 하므로

$2=6-\triangle$ $\therefore \triangle=4$

따라서 주어진 식은 $(x^4+6x^2+9)-4x^2$으로 나타낼 수 있다.

**12** $x^4-13x^2y^2+36y^4$

$=(x^4-12x^2y^2+36y^4)-x^2y^2$

$=(x^2-6y^2)^2-(xy)^2$

$=(x^2+xy-6y^2)(x^2-xy-6y^2)$

$=(x+3y)(x-2y)(x+2y)(x-3y)$

따라서 구하는 네 일차식의 합은

$(x+3y)+(x-2y)+(x+2y)+(x-3y)=4x$ 답 ③

다른 풀이 $x^2=X$, $y^2=Y$로 놓으면

$x^4-13x^2y^2+36y^4$

$=X^2-13XY+36Y^2$

$=(X-4Y)(X-9Y)$

$=(x^2-4y^2)(x^2-9y^2)$

$=(x+2y)(x-2y)(x+3y)(x-3y)$

**13** $x^2-xy-6y^2-x+8y-2$

$=x^2-(y+1)x-6y^2+8y-2$

$=x^2-(y+1)x-2(y-1)(3y-1)$

$=(x+2y-2)(x-3y+1)$

$$\begin{array}{lll} 1 & 2(y-1) \rightarrow & 2y-2 \\ 1 & -(3y-1) \rightarrow & -3y+1 \\ \hline & & -y-1 \end{array}$$

따라서 $a=2$, $b=-3$이므로

$a-b=5$ 답 5

**14** $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=(b-c)a^2+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=(a-b)(b-c)(a-c)$ 답 ②

**15** $ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c-a)$

$=a^2b+ab^2-b^2c-bc^2-c^2a+ca^2$

$=(b+c)a^2+(b^2-c^2)a-bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b-c)a-bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a-c)=0$

그런데 $a+b>0$, $b+c>0$이므로

$a-c=0 \quad \therefore a=c$

따라서 주어진 삼각형은 $a=c$인 이등변삼각형이다. 답 ②

> 삼각형의 세 변의 길이는 양수이므로
> $a>0$, $b>0$, $c>0$
> $\therefore a+b>0$, $b+c>0$

**16** $P(-1)=0$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

> $P(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $P(a)=0$인 $a$는 $\pm(6$의 약수$)$ 중에서 찾는다.

$P(x)=(x+1)(x^2-5x+6)$

$=(x+1)(x-2)(x-3)$

즉 $P(-1)=P(2)=P(3)=0$이므로

$a=-1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=3$ …… ㉠

$Q(1)=0$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $Q(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$Q(x)=(x-1)(x^2+x-6)$

$=(x-1)(x-2)(x+3)$

즉 $Q(1)=Q(2)=Q(-3)=0$이므로

$a\neq1$, $a\neq2$, $a\neq-3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a$는 $-1$, 3이므로 구하는 합은

$-1+3=2$ 답 ②

**17** $x-1$이 $P(x)=ax^4+bx^3+cx-a$의 인수이므로

$P(1)=a+b+c-a=0$

$\therefore c=-b$

$\therefore P(x)=ax^4+bx^3-bx-a$

$=a(x^4-1)+bx(x^2-1)$

$=a(x^2+1)(x+1)(x-1)$

$\quad +bx(x+1)(x-1)$

$=(x+1)(x-1)(ax^2+bx+a)$

> $x^4-1$
> $=(x^2+1)(x^2-1)$
> $=(x^2+1)(x+1)(x-1)$

따라서 항상 $P(x)$의 인수인 것은 ②이다. 답 ②

**18** $V(x)=x^3+x^2-8x-12$라 하자.

$V(-2)=0$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $V(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & -8 & -12 \\ & & -2 & 2 & 12 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$V(x)=(x+2)(x^2-x-6)$

$=(x+2)^2(x-3)$

이때 $V(x)=\{P(x)\}^2Q(x)$이므로

$P(x)=x+2$, $Q(x)=x-3$

$\therefore Q(10)=10-3=7$ 답 7

## 1등급을 위한 고난도 문제

본책 19~21쪽

**01** $\dfrac{x^2+ax+b}{3x^2+2bx+9}=k$ ($k$는 상수)라 하면

$x^2+ax+b=3kx^2+2bkx+9k$

위의 등식이 $x$에 대한 항등식이므로

$1=3k$, $a=2bk$, $b=9k$

$\therefore k=\dfrac{1}{3}$, $a=2$, $b=3$

$\therefore a+b=5$ 답 5

**02** 주어진 등식의 양변에

$x=1$을 대입하면

$-1=a_{10}+a_9+a_8+a_7+\cdots+a_1+a_0$ …… ㉠

$x=-1$을 대입하면

$1=a_{10}-a_9+a_8-a_7+\cdots-a_1+a_0$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$-2=2(a_9+a_7+a_5+a_3+a_1)$

$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=-1$ 답 $-1$

**03** $(x-a)(x+b)(x-c)$

$=x^3+(-a+b-c)x^2+(-ab-bc+ca)x+abc$,

$(x+a)(x-b)(x+c)$

$=x^3+(a-b+c)x^2+(-ab-bc+ca)x-abc$

이므로

$-a+b-c=a-b+c$, $abc=-abc$

$\therefore b=a+c$, $abc=0$

ㄱ. $abc=0$이므로 $a$, $b$, $c$ 중 적어도 하나는 0이다.

ㄴ. $a=0$이면 $b=c$이다.

ㄷ. $a$, $b$, $c$가 이 순서대로 연속하는 세 정수이면 $a=b-1$, $c=b+1$이므로 이것을 $b=a+c$에 대입하면

$b=b-1+b+1 \quad \therefore b=0$

따라서 $a=-1$, $c=1$이므로

$a+b+c=0$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

**04** $x-2y=-1$, 즉 $x=2y-1$이므로

$ax^2+bxy+cy^2$

$=a(2y-1)^2+b(2y-1)y+cy^2$

$=a(4y^2-4y+1)+b(2y^2-y)+cy^2$

$=(4a+2b+c)y^2+(-4a-b)y+a$ … ❶

$(4a+2b+c)y^2+(-4a-b)y+a=2$가 $y$에 대한 항등식이므로

$4a+2b+c=0$, $-4a-b=0$, $a=2$

$\therefore a=2$, $b=-8$, $c=8$ … ❷

$\therefore a-b+c=18$ … ❸

답 18

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $ax^2+bxy+cy^2$을 $y$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 40 % |
| ❷ $a$, $b$, $c$의 값을 구할 수 있다. | 50 % |
| ❸ $a-b+c$의 값을 구할 수 있다. | 10 % |

**05** $P(x)$를 $x^3+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax^2+bx+c$ ($a$, $b$, $c$는 상수)라 하면

$$P(x)=(x^3+1)Q(x)+ax^2+bx+c$$
$$=(x+1)(x^2-x+1)Q(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $P(x)$를 $x^2-x+1$로 나누었을 때의 나머지가 $3x-5$이므로 ㉠에서

$$P(x)=(x+1)(x^2-x+1)Q(x)+a(x^2-x+1)+3x-5 \quad \cdots\cdots ㉡$$

또 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 $-2$, 즉 $P(-1)=-2$이므로 ㉡에서

$3a-8=-2 \quad \therefore a=2$

따라서 구하는 나머지는

$2(x^2-x+1)+3x-5=2x^2+x-3$

답 $2x^2+x-3$

$x^3+1$
$=(x+1)(x^2-x+1)$

**1등급 비밀노트**

㉠에서 $(x+1)(x^2-x+1)Q(x)$는 $x^2-x+1$로 나누어떨어지므로 $ax^2+bx+c$를 $x^2-x+1$로 나누었을 때의 나머지가 $3x-5$이어야 한다. 이때 ㉡에서

$P(x)=(x^2-x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}+3x-5$

이므로 $P(x)$를 $x^2-x+1$로 나누었을 때의 몫은 $(x+1)Q(x)+a$이다.

**06** $P(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+2x-7$

ㄱ. $P(x)+5$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는
$P(1)+5=2\cdot1-7+5=0$
이므로 $P(x)+5$는 $x-1$로 나누어떨어진다.

ㄴ. $P(x-1)$을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는
$P(-1-1)=P(-2)=2\cdot(-2)-7=-11$

ㄷ. $xP\left(\frac{1}{2}x\right)$를 $x+4$로 나누었을 때의 나머지는
$-4P\left(\frac{1}{2}\cdot(-4)\right)=-4P(-2)=44$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

$P(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $P(a)$이다.

**07** $P(1)=P(2)=P(3)=k$ ($k$는 상수)라 하면

$P(1)-k=0$, $P(2)-k=0$, $P(3)-k=0$

즉 $G(x)=P(x)-k$라 하면

$G(1)=G(2)=G(3)=0$이고 $G(x)$의 $x^3$의 계수가 1이므로

$P(x)$와 $G(x)$의 $x^3$의 계수는 같다.

$G(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$

$\therefore P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+k$ ⋯ ❶

이때 $P(-1)=0$이므로

$-2\cdot(-3)\cdot(-4)+k=0$

$\therefore k=24$ ⋯ ❷

$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+24$이므로

$P(0)=-1\cdot(-2)\cdot(-3)+24=18$ ⋯ ❸

답 18

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $P(1)=P(2)=P(3)=k$로 놓고 $P(x)$를 식으로 나타낼 수 있다. | 50 % |
| ❷ $k$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❸ $P(0)$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

**08**
$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & a & b & c \\ & & 2 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & a+2 & b-2 & \boxed{1} \end{array}$$

$2(a+2)=-2$에서 $a=-3$

$2(b-2)=-4$에서 $b=0$

$c-4=1$에서 $c=5$

$\therefore ax^2+bx+c=-3x^2+5$

오른쪽 조립제법에서 $-3x^2+5$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫은 $-3x+3$이다.

$$\begin{array}{c|ccc} -1 & -3 & 0 & 5 \\ & & 3 & -3 \\ \hline & -3 & 3 & \boxed{2} \end{array}$$

답 $-3x+3$

**09** $p=a^3$, $q=b^3$, $r=a^2b$, $s=ab^2$, $t=2(a+b)^2$이므로 $p-q+r-s=t$에서

$a^3-b^3+a^2b-ab^2=2(a+b)^2$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)+ab(a-b)=2(a+b)^2$

$(a-b)(a^2+2ab+b^2)=2(a+b)^2$

$(a-b)(a+b)^2=2(a+b)^2$

이때 $a+b\neq0$이므로 $a-b=2$

답 ⑤

**10** 두 정육면체의 부피의 차가 7이므로

$a^3-b^3=7$

$\therefore (a-b)(a^2+ab+b^2)=7 \quad \cdots\cdots ㉠$ ⋯ ❶

$a$, $b$는 양수이고 $a>b$이므로
$a^3>b^3$

두 정육면체의 한 면의 둘레의 길이의 차가 4이므로

$4a-4b=4$

$\therefore a-b=1 \quad \cdots\cdots ㉡$ ⋯ ❷

㉠에 ㉡을 대입하면

$a^2+ab+b^2=7$ ⋯ ❸

답 7

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 부피의 차를 이용하여 $a$, $b$에 대한 식을 세우고, 인수분해할 수 있다. | 40 % |
| ❷ 한 면의 둘레의 길이의 차를 이용하여 $a$, $b$에 대한 식을 세울 수 있다. | 40 % |
| ❸ $a^2+ab+b^2$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

**11** $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$에서

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

$\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

$\therefore (x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

ㄱ. $x+y+z\neq 0$이면

$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

$\therefore x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$

ㄴ. $(x-y)(y-z)(z-x)\neq 0$이면 $x-y\neq 0$, $y-z\neq 0$, $z-x\neq 0$이므로

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\neq 0$

$\therefore x+y+z=0$

ㄷ. 삼각형의 세 변의 길이가 $x$, $y$, $z$이면 $x+y+z>0$이므로

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$

따라서 $x=y=z$이므로 정삼각형이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

$x-y=0$, $y-z=0$, $z-x=0$이므로 $x=y=z$

**12** $4-4x=X$로 놓으면

$4x^4+(4-4x-x^2)(4-4x+3x^2)$

$=4x^4+(X-x^2)(X+3x^2)$

$=4x^4+X^2+2x^2X-3x^4$

$=x^4+2Xx^2+X^2$

$=(x^2+X)^2=(x^2-4x+4)^2$

$=\{(x-2)^2\}^2=(x-2)^4$

따라서 $(x-2)^4$의 인수인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

**13** $(x+\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})(x+5\sqrt{3})(x+6\sqrt{3})+a$

$=(x+\sqrt{3})(x+6\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})(x+5\sqrt{3})+a$

$=(x^2+7\sqrt{3}x+18)(x^2+7\sqrt{3}x+30)+a$

$x^2+7\sqrt{3}x=X$로 놓으면

$(X+18)(X+30)+a$

$=X^2+48X+540+a$

$=(X+24)^2-36+a$

$=(x^2+7\sqrt{3}x+24)^2-36+a$ ...... ㉠

따라서 ㉠이 이차식의 제곱이 되려면

$-36+a=0$ $\quad\therefore a=36$ 답 36

**14** $x^4-x^2+16=(x^4+8x^2+16)-9x^2$

$=(x^2+4)^2-(3x)^2$

$=(x^2+3x+4)(x^2-3x+4)$

즉 $Q(x)=x^2+3x+4$이므로

$Q(x^2)=x^4+3x^2+4=(x^4+4x^2+4)-x^2$

$=(x^2+2)^2-x^2$

$=(x^2+x+2)(x^2-x+2)$

따라서 $Q(x^2)$의 인수인 것은 ③이다. 답 ③

**15** $(x+y)^2(x-y)^2-18(x^2+y^2)+81$

$=(x^2-y^2)^2-18(x^2+y^2)+81$

$=(x^2+y^2)^2-18(x^2+y^2)+81-4x^2y^2$

$=\{(x^2+y^2)-9\}^2-(2xy)^2$

$=(x^2+y^2+2xy-9)(x^2+y^2-2xy-9)$

$=\{(x+y)^2-3^2\}\{(x-y)^2-3^2\}$

$=(x+y+3)(x+y-3)(x-y+3)(x-y-3)$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ①

다른 풀이 $x+y=a$, $x-y=b$라 하고 두 식을 연립하여 풀면 $x=\frac{a+b}{2}$, $y=\frac{a-b}{2}$이므로

$x^2+y^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$

$x^2+y^2$
$=\frac{1}{4}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a-b)^2$
$=\frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2)$
$+\frac{1}{4}(a^2-2ab+b^2)$
$=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$

$\therefore (x+y)^2(x-y)^2-18(x^2+y^2)+81$

$=a^2b^2-9(a^2+b^2)+81=a^2b^2-9a^2-9b^2+81$

$=a^2(b^2-9)-9(b^2-9)=(a^2-9)(b^2-9)$

$=(a+3)(a-3)(b+3)(b-3)$

$=(x+y+3)(x+y-3)(x-y+3)(x-y-3)$

**16** $\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+1}=\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{c^2+1}$의 양변을 제곱하면 $(a^2+b^2)(a^2+1)=(b^2+c^2)(c^2+1)$

$a^4+a^2+b^2a^2+b^2=b^2c^2+b^2+c^4+c^2$

$(a^2-c^2)b^2+a^2-c^2+a^4-c^4=0$

$(a^2-c^2)(b^2+1)+(a^2+c^2)(a^2-c^2)=0$

$(a^2-c^2)(a^2+b^2+c^2+1)=0$

$\therefore (a+c)(a-c)(a^2+b^2+c^2+1)=0$ ··· ❶

이때 $a+c>0$, $a^2+b^2+c^2+1>0$이므로

$a-c=0$ $\quad\therefore a=c$

따라서 주어진 삼각형은 $a=c$인 이등변삼각형이다. ··· ❷

답 $a=c$인 이등변삼각형

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 양변을 제곱한 후 인수분해할 수 있다. | 60 % |
| ❷ 어떤 삼각형인지 말할 수 있다. | 40 % |

**17** $a^3+b^3+c^3-ab(a+b)+bc(b+c)-ca(c+a)$

$=a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2+b^2c+bc^2-c^2a-ca^2$

$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^2(b+c)+c^2(b+c)$

$=(a-b-c)a^2-(b^2+c^2)a+(b^2+c^2)(b+c)$

$=(a-b-c)a^2-(a-b-c)(b^2+c^2)$

$=(a^2-b^2-c^2)(a-b-c)$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ②이다. 답 ②

**18** $2x^2+7xy+6y^2+5x+7y-3$

$=2x^2+(7y+5)x+(6y^2+7y-3)$

$=2x^2+(7y+5)x+(2y+3)(3y-1)$

$=(x+\boxed{2y+3})(2x+\boxed{3y-1})$

$$\begin{array}{lll} 1 & 2y+3 & \rightarrow\ 4y+6 \\ 2 & 3y-1 & \rightarrow\ 3y-1 \\ \hline & & 7y+5 \end{array}$$

앞의 식에 $y$ 대신 $yz$를 대입하면

$$2x^2+7xyz+6y^2z^2+5x+7yz-3$$
$$=(x+\boxed{2yz+3})(2x+3yz-1)$$

따라서 $A=2y+3$, $B=3y-1$, $C=2yz+3$이므로

$$2A+3B-C=2(2y+3)+3(3y-1)-(2yz+3)$$
$$=13y-2yz$$

답 ⑤

**19** $\underline{x^2+ax-y^2}+by-3=x^2+ax-(y^2-by+3)$
에서 $y^2-by+3$은
$(y-1)(y-3)$ 또는 $(y+1)(y+3)$
으로 인수분해되어야 하므로
$b=4$ 또는 $b=-4$

(i) $b=4$일 때,
$x^2+ax-(y^2-4y+3)=x^2+ax-(y-1)(y-3)$
ⓘ (주어진 식)$=\{x-(y-1)\}\{x+(y-3)\}$
$=x^2-2x-(y-1)(y-3)$
$\therefore a=-2$
ⓘⓘ (주어진 식)$=\{x+(y-1)\}\{x-(y-3)\}$
$=x^2+2x-(y-1)(y-3)$
$\therefore a=2$

(ii) $b=-4$일 때,
$x^2+ax-(y^2+4y+3)=x^2+ax-(y+1)(y+3)$
ⓘ (주어진 식)$=\{x-(y+1)\}\{x+(y+3)\}$
$=x^2+2x-(y+1)(y+3)$
$\therefore a=2$
ⓘⓘ (주어진 식)$=\{x+(y+1)\}\{x-(y+3)\}$
$=x^2-2x-(y+1)(y+3)$
$\therefore a=-2$

(i), (ii)에서 $a$, $b$의 순서쌍 $(a, b)$는
$(-2, 4)$, $(2, 4)$, $(2, -4)$, $(-2, -4)$
이므로 $a+b$의 값이 될 수 있는 것은 $2$, $6$, $-2$, $-6$
이다.

답 ④

**20** $P(x)=6x^4+5x^3+4x^2-2x-1$이라 하면

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+1-1-1=0,$$
$$P\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{27}-\frac{5}{27}+\frac{4}{9}+\frac{2}{3}-1=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
\frac{1}{2} & 6 & 5 & 4 & -2 & -1 \\
 & & 3 & 4 & 4 & 1 \\ \hline
-\frac{1}{3} & 6 & 8 & 8 & 2 & 0 \\
 & & -2 & -2 & -2 & \\ \hline
 & 6 & 6 & 6 & 0 &
\end{array}$$

$$\therefore P(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)(6x^2+6x+6)$$
$$=(2x-1)(3x+1)(x^2+x+1)$$

답 ④

일품 BOX

$(x^2+ax-3)-y^2+by$
에서 $x^2+ax-3$이
$(x-1)(x+3)$ 또는
$(x-3)(x+1)$
로 인수분해되는 경우로도 풀 수 있다.

$-2+4=2$,
$2+4=6$,
$2-4=-2$,
$-2-4=-6$

$p=1$, $q=6$일 때,
$p+2q=1+12=13$
$p=-1$, $q=-6$일 때,
$p+2q=-1-12$
$=-13$

**21** $P(1)=0$, $P(-3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & 5 & -1 & -17 & 12 \\
 & & 1 & 6 & 5 & -12 \\ \hline
-3 & 1 & 6 & 5 & -12 & 0 \\
 & & -3 & -9 & 12 & \\ \hline
 & 1 & 3 & -4 & 0 &
\end{array}$$

$$\therefore P(x)=(x-1)(x+3)(x^2+3x-4)$$
$$=(x-1)^2(x+3)(x+4) \quad \cdots❶$$

따라서
$P(21)=20^2\cdot24\cdot25=400\cdot24\cdot25=24\cdot10^4$
이므로 $n=24$ $\cdots❷$

답 24

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $P(x)$를 인수분해할 수 있다. | 60 % |
| ❷ 자연수 $n$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |

**22** $P(x)=2x^3+ax^2+(-2-2a)x-12$라 하면 $P(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 2 & a & -2-2a & -12 \\
 & & 4 & 2a+8 & 12 \\ \hline
 & 2 & a+4 & 6 & 0
\end{array}$$

$$\therefore P(x)=(x-2)\{2x^2+(a+4)x+6\}$$

이때
$2x^2+(a+4)x+6=(2x+p)(x+q)$
($p$, $q$는 정수)
라 하면
$2x^2+(a+4)x+6=2x^2+(p+2q)x+pq$
$\therefore a+4=p+2q$, $6=pq$
$6=pq$를 만족시키는 두 정수 $p$, $q$의 순서쌍 $(p, q)$는
$(1, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$,
$(-1, -6)$, $(-2, -3)$, $(-3, -2)$, $(-6, -1)$
따라서 $p+2q$의 값 중 가장 큰 값과 가장 작은 값은 각각 $13$, $-13$이고 $a=p+2q-4$이므로
$M=13-4=9$, $m=-13-4=-17$
$\therefore M-m=26$

답 26

**23** $P(2x+1)=16P(x+1)$ $\cdots\cdots$ ㉠
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $P(1)=16P(1)$
$\therefore P(1)=0$
따라서 사차식 $P(x)$를
$P(x)=(x-1)^nQ(x)$
($n=1$, $2$, $3$, $4$, $Q(x)$는 다항식, $Q(1)\neq0$)
라 하면 ㉠에서

$2^n x^n Q(2x+1)=16x^n Q(x+1)$
$x\neq0$일 때도 등식이 성립하므로
$2^n Q(2x+1)=16Q(x+1)$
위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$2^n Q(1)=16Q(1)$, $\quad 2^n=16$ ($\because Q(1)\neq0$)
$\therefore n=4$
그런데 $P(x)=(x-1)^4 Q(x)$에서 $P(x)$는 사차식이므로 $Q(x)$는 0이 아닌 상수이어야 한다.
따라서 $P(x)=a(x-1)^4$ $(a\neq0)$이라 하면 조건 (가)에서
$a\cdot2^4=32 \quad \therefore a=2$
즉 $P(x)=2(x-1)^4$이므로
$P(4)=2\cdot3^4=162$ 답 ④

$x$에 대한 항등식이므로 $x=0$, $x\neq0$일 때도 모두 등식이 성립해야 한다.

## 사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 22쪽

**01** $P(x)=ax^2+bx+1$ ($a$, $b$는 상수, $a\neq0$)이라 하면

$\{P(x)\}^2$
$=(ax^2+bx+1)^2$
$=a^2x^4+b^2x^2+1+2abx^3+2bx+2ax^2$
$=a^2x^4+2abx^3+(b^2+2a)x^2+2bx+1$,
$P(x^2)+2x^2=a(x^2)^2+bx^2+1+2x^2$
$=ax^4+(b+2)x^2+1$
이때 $\{P(x)\}^2=P(x^2)+2x^2$이 $x$에 대한 항등식이므로
$a^2=a$, $2ab=0$, $b^2+2a=b+2$, $2b=0$
$\therefore a=1$, $b=0$
$\therefore P(x)=x^2+1$
따라서
$\{P(x)\}^3=(x^2+1)^3=x^6+3x^4+3x^2+1$
이므로 $x^2$의 계수는 3이다. 답 ①

$2b=0$에서 $b=0$
$b^2+2a=b+2$에서
$2a=2 \quad \therefore a=1$
$a=1$, $b=0$일 때,
$a^2=a$, $2ab=0$
이므로 네 식을 모두 만족시킨다.

**02** $\{P(x)\}^{2018}=\dfrac{1}{2^{2018}}(x-1)^{2018}$,

$P(x^2)=\dfrac{1}{2}(x^2-1)$이므로 $\{P(x)\}^{2018}$을 $P(x^2)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ ($a$, $b$는 상수)라 하면

$\dfrac{1}{2^{2018}}(x-1)^{2018}$
$=\dfrac{1}{2}(x^2-1)Q(x)+ax+b$
$=\dfrac{1}{2}(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
㉠의 양변에 $x=1$, $x=-1$을 각각 대입하면
$0=a+b$, $1=-a+b$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{2}$

따라서 $R(x)=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$이므로
$R(-5)=\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}=3$ 답 3

**03** $P(x)=x^2-4x-3$이라 하면 $P(x)$를 $x-\alpha$와 $x-\beta$로 각각 나누었을 때의 나머지가 모두 1이므로
$P(\alpha)=P(\beta)=1$
$\therefore P(\alpha)-1=0$, $P(\beta)-1=0$
$G(x)=P(x)-1$이라 하면 $G(\alpha)=G(\beta)=0$이므로
$G(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$
$\therefore P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)+1$
$=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta+1$
즉 $\alpha\beta+1=-3$이므로 $\quad \alpha\beta=-4$
따라서 $P(x)$를 $x-\alpha\beta$로 나누었을 때의 나머지는
$P(\alpha\beta)=P(-4)=(-4)^2-4\cdot(-4)-3=29$
답 29

$P(x)$의 $x^2$의 계수가 1이므로 $G(x)$의 $x^2$의 계수도 1이다.

**04** $A(1)B(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $A(x)B(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | −1 | −2 | 3 | −1 |
| | | 1 | 0 | −2 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | −2 | 1 | 0 |
| | | 1 | 1 | −1 | |
| | 1 | 1 | −1 | 0 | |

$\therefore A(x)B(x)=x^4-x^3-2x^2+3x-1$
$=(x-1)^2(x^2+x-1)$
이때 $A(x)+B(x)$는 삼차식이고 $m<n$이므로
$A(x)=x-1$,
$B(x)=(x-1)(x^2+x-1)=x^3-2x+1$
$\{A(x)\}^2=(x-1)^2=x^2-2x+1$이므로 $B(x)$를 $\{A(x)\}^2$으로 나누면

$$\begin{array}{r} x+2 \\ x^2-2x+1\,\overline{)\,x^3\qquad\quad -2x+1} \\ \underline{x^3-2x^2+x\qquad} \\ 2x^2-3x+1 \\ \underline{2x^2-4x+2} \\ x-1 \end{array}$$

따라서 구하는 나머지는 $x-1$이다. 답 ②

다른 풀이 $B(x)$를 $\{A(x)\}^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ ($a$, $b$는 상수)라 하면
$(x-1)(x^2+x-1)=(x-1)^2Q(x)+ax+b$
위의 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$0=a+b \quad \therefore b=-a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
따라서
$(x-1)(x^2+x-1)=(x-1)^2Q(x)+a(x-1)$
이고 $x\neq1$일 때도 등식이 성립하므로
$x^2+x-1=(x-1)Q(x)+a$

일품 BOX

앞의 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a=1$

㉠에서 $b=-1$이므로 구하는 나머지는 $x-1$이다.

**05** $4x(x+1)(x+2)(x+3)+a$

$=4\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+a$

$=4(x^2+3x)(x^2+3x+2)+a$

$x^2+3x=X$로 놓으면

$4X(X+2)+a$

$=4X^2+8X+a$

$=4(X+1)^2+a-4$

$=4(x^2+3x+1)^2+a-4$

$=(2x^2+6x+2)^2+a-4$ ······ ㉠

따라서 ㉠이 이차식의 제곱이 되려면

$a-4=0$ $\therefore a=4$ 답 4

**06** ㄱ. $P(1)=-a-b$이고 $P(-1)=-a-b$이므로 $P(1)=0$이면 $P(-1)=0$이다.

즉 $x-1$이 $P(x)$의 인수이면 $x+1$도 $P(x)$의 인수이다.

$x-a$가 $P(x)$의 인수이면 $P(a)=0$이다.

ㄴ. $P(x)$가 $x^2+1$로 나누어떨어지면

$P(x)=(x^2+1)(ax^2-2a)=ax^4-ax^2-2a$

즉 $ax^4-bx^2-2a=ax^4-ax^2-2a$이므로

$a=b$

이때 $a\neq0$, $b\neq0$이므로 $a+b\neq0$이다.

$x^2=X$라 할 때, $aX^2-bX-2a$가 $X+1$로 나누어떨어지면 $aX^2-bX-2a=(X+1)(aX-2a)$로 놓을 수 있다.

ㄷ. $P(n)=an^4-bn^2-2a=0$이라 하면

$a(n^4-2)-bn^2=0$

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{n^4-2}{n^2}$

따라서 $a=n^2$, $b=n^4-2$이면 $P(n)=0$이므로 자연수 $n$에 대하여 $x-n$이 $P(x)$의 인수가 되도록 하는 두 정수 $a$, $b$가 항상 존재한다.

두 정수 $a$, $b$가 $a=kn^2$, $b=k(n^4-2)$ ($k$는 상수) 꼴이면 $P(n)=0$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

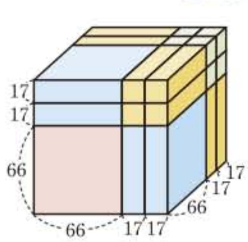
**07** $66=x$, $17=y$라 하면 $A$, $B$, $C$, $D$의 부피는 각각 $x^3$, $x^2y$, $xy^2$, $y^3$이므로 $A$ 1개, $B$ 6개, $C$ 12개, $D$ 8개의 부피의 합은

$x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3=(x+2y)^3$

따라서 정육면체의 한 모서리의 길이는

$x+2y=66+2\cdot17=100$ 답 100

참고 만들어지는 정육면체는 오른쪽 그림과 같다.




## 만점 도전을 위한 실전 마무리 문제 본책 23~26쪽

**01** 전략 곱셈 공식을 이용하여 $r$의 값을 구한다.

풀이 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$=50+2\cdot47$

$=144$

$\therefore a+b+c=12$ ($\because a+b+c>0$)

이때 $a+b+c=12r$이므로

$12=12r$

$\therefore r=1$

따라서 $\triangle$ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}r(a+b+c)=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot12=6$ 답 ③

세 변의 길이가 $a$, $b$, $c$이고 내접원의 반지름의 길이가 $r$인 삼각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$

**02** 전략 곱셈 공식을 이용하여 $ab+bc+ca$의 값을 구하고, $a$, $b$, $c$ 사이의 관계를 식으로 나타낸다.

풀이 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로

$6^2=12+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=12$

이때 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca=12$이므로

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\therefore a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$

$\therefore a=b=c$

따라서 $a+b+c=6$에서 $a=b=c=2$이므로

$a^3+b^3+c^3=3\cdot2^3=24$ 답 ⑤

**1등급 비밀노트**

① $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

$=\dfrac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

② $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

**03** 전략 $n=1$, $n=2$인 경우는 $n^4+2n^2+24$를 $n^2+2n+3$으로 직접 나누어 구한 나머지보다 $n^2+2n+3$의 값이 작음에 주의한다.

풀이 $n=1$일 때,

$n^4+2n^2+24=27$, $n^2+2n+3=6$

이므로

$R(1)=\boxed{3}$

27=6·4+3이므로 27을 6으로 나누었을 때의 나머지는 3이다.

$n=2$일 때,

$n^4+2n^2+24=48$, $n^2+2n+3=11$

이므로

$R(2)=\boxed{4}$

48=11·4+4이므로 48을 11로 나누었을 때의 나머지는 4이다.

한편 $n^4+2n^2+24$를 $n^2+2n+3$으로 나누면

$$\begin{array}{r} n^2-2n+3 \\ n^2+2n+3\,\big)\,\overline{n^4 \qquad +2n^2 \qquad +24} \\ \underline{n^4+2n^3+3n^2 \qquad\qquad} \\ -2n^3-\ n^2 \qquad\quad \\ \underline{-2n^3-4n^2-6n \quad\;\;} \\ 3n^2+6n+24 \\ \underline{3n^2+6n+\ 9} \\ 15 \end{array}$$

$\therefore n^4+2n^2+24$

$=(n^2+2n+3)(\boxed{n^2-2n+3})+15$

$n\geq3$일 때, $n^2+2n+3\geq18$이므로

$R(n)=15$

따라서 $a=3$, $b=4$, $P(n)=n^2-2n+3$이므로

$a+P(b)=3+P(4)=3+11=14$ 답 ④

**04** 전략 주어진 등식의 양변에 적당한 수를 대입한다.

풀이 $a+bP_1(x)+cP_2(x)+dP_3(x)$

$=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)$

$+d(x-1)(x-2)(x-3)$

이므로

$a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)$

$+d(x-1)(x-2)(x-3)$

$=3x^3-5x^2+7$

위의 등식이 $x$에 대한 항등식이므로 $d=3$

등식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $a=5$

등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$a+b=11 \qquad \therefore b=6$

등식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$a+2b+2c=43 \qquad \therefore c=13$

$\therefore a+b+c+d=27$ 답 ③

좌변과 우변의 최고차항의 계수는 각각 $d$, 3이므로 $d=3$

**05** 전략 $\{A(x)\}^n$을 몫과 나머지를 이용하여 $x$에 대한 항등식으로 나타낸다.

풀이 다항식 $\{A(x)\}^n$을 $B(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_n(x)$, 나머지를 $R_n(x)=a_nx+b_n$ ($a_n$, $b_n$은 상수)이라 하면

$\{A(x)\}^n=(x^2-x-2)Q_n(x)+a_nx+b_n$

$=(x+1)(x-2)Q_n(x)+a_nx+b_n$

이때 $A(-1)=-3$, $A(2)=0$이므로

$-a_n+b_n=(-3)^n$, $2a_n+b_n=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a_n=-\frac{1}{3}\cdot(-3)^n$, $b_n=\frac{2}{3}\cdot(-3)^n$

따라서 $R_n(1)=a_n+b_n=\frac{1}{3}\cdot(-3)^n$이므로

$R_1(1)+R_2(1)+R_3(1)+R_4(1)$

$=\frac{1}{3}\{(-3)^1+(-3)^2+(-3)^3+(-3)^4\}$

$=20$ 답 ⑤

주어진 $A(x)$에 $x=-1$, $x=2$를 대입하여 구한다.

**06** 전략 주어진 두 등식을 이용하여 보기의 식을 $x+1$을 포함한 식으로 나타낸다.

풀이 $A(x)+B(x)=(x+1)Q_1(x)+1$ …… ㉠

$A(x)-B(x)=(x+1)Q_2(x)+3$ …… ㉡

ㄱ. ㉠+㉡을 하면

$2A(x)=(x+1)\{Q_1(x)+Q_2(x)\}+4$ …… ㉢

$\therefore A(x)-2=\frac{1}{2}(x+1)\{Q_1(x)+Q_2(x)\}$

따라서 $A(x)-2$는 $x+1$로 나누어떨어진다.

ㄴ. ㉡+㉢을 하면

$3A(x)-B(x)$

$=(x+1)\{Q_1(x)+2Q_2(x)\}+7$

따라서 $3A(x)-B(x)$는 $x+1$로 나누어떨어지지 않는다.

$3A(x)-B(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 7이다.

ㄷ. ㉠×3−㉡을 하면

$2A(x)+4B(x)=(x+1)\{3Q_1(x)-Q_2(x)\}$

$\therefore A(x)+2B(x)$

$=\frac{1}{2}(x+1)\{3Q_1(x)-Q_2(x)\}$

따라서 $A(x)+2B(x)$는 $x+1$로 나누어떨어진다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

다른 풀이 $A(x)+B(x)=(x+1)Q_1(x)+1$에서

$A(-1)+B(-1)=1$ …… ㉣

$A(x)-B(x)=(x+1)Q_2(x)+3$에서

$A(-1)-B(-1)=3$ …… ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면

$A(-1)=2$, $B(-1)=-1$

ㄱ. $A(-1)-2=2-2=0$

따라서 $A(x)-2$는 $x+1$로 나누어떨어진다.

ㄴ. $3A(-1)-B(-1)=6+1=7$

따라서 $3A(x)-B(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 7이다.

ㄷ. $A(-1)+2B(-1)=2-2=0$

따라서 $A(x)+2B(x)$는 $x+1$로 나누어떨어진다.

**07** 전략 $ax+b=0$을 만족시키는 $x$의 값을 $P(x)$에 대입한 값이 $R$임을 이용한다.

풀이 $P(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지가 $R$이므로

$R=P\left(-\frac{b}{a}\right)$

$H(x)=\left(ax+\frac{1}{R}\right)P(x)$라 하면 $H(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지는 $H\left(-\frac{b}{a}\right)$이므로

$H\left(-\frac{b}{a}\right)=\left(-b+\frac{1}{R}\right)P\left(-\frac{b}{a}\right)$

$=\left(-b+\frac{1}{R}\right)\cdot R=1-bR$ 답 ②

**08** 전략 나머지정리를 이용하여 $R_1$, $R_2$를 각각 $a$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $R_1=P(-a)=-a^3+2a^2+3a-4$,
$R_2=P(a)=a^3+2a^2-3a-4$이므로

$$R_1+R_2=4a^2-8$$

$4a^2-8=12$에서

$$a^2=5$$

따라서 $P(x)$를 $x-a^2$으로 나누었을 때의 나머지는

$$P(a^2)=P(5)=5^3+2\cdot5^2-3\cdot5-4=156$$

답 ④

**09** 전략 조건 (가)를 이용하여 차수가 가장 낮은 다항식 $P(x)$의 차수를 유추한다.

풀이 조건 (가)에 의하여 $P(x)-(x+10)$은 $x^2-4$와 $x^2+x-2$, 즉 $(x+2)(x-2)$와 $(x+2)(x-1)$로 각각 나누어떨어지므로 차수가 가장 낮은 다항식 $P(x)-(x+10)$을

$$P(x)-(x+10)=a(x+2)(x-1)(x-2) \quad (a\neq0)$$

라 하면

$$P(x)=a(x+2)(x-1)(x-2)+x+10$$

조건 (나)에 의하여 $P(-1)=15$이므로

$$6a+9=15 \qquad \therefore a=1$$

$$\therefore P(x)=(x+2)(x-1)(x-2)+x+10=x^3-x^2-3x+14$$

따라서 구하는 $P(x)$의 상수항은 14이다. 답 ④

$P(x)-(x+10)$은 $x+2$, $x-1$, $x-2$를 인수로 가지므로 3차 이상의 다항식이다.

**10** 전략 $P(x)$를 $n$차식이라 하고 주어진 등식의 좌변과 우변의 차수를 비교하여 $n$의 값을 구한다.

풀이 $P(x^2)$

$$=x^3P(x+3)+6x^2(x+3)(x-1)(x-3) \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

최고차항의 계수가 1인 다항식 $P(x)$가 $n$차식이라 하면 ㉠의 좌변은 $2n$차식이고, ㉠의 우변은 $(n+3)$차식 또는 5차식이므로 ㉠이 $x$에 대한 항등식이려면

$2n=n+3$ 또는 $2n=5$

$\therefore n=3$ 또는 $n=\frac{5}{2}$

그런데 $n$은 자연수이므로

$$n=3$$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$P(0)=0$$

㉠의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$$P(9)=-27P(0)$$

$$\therefore P(9)=0 \ (\because P(0)=0)$$

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$$P(9)=27P(6)$$

$$\therefore P(6)=0 \ (\because P(9)=0)$$

따라서 $P(x)$는 $x$, $x-9$, $x-6$을 인수로 갖고 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로

$$P(x)=x(x-6)(x-9)$$

즉 구하는 나머지는

$$P(-1)=-1\cdot(-7)\cdot(-10)=-70$$

답 ②

**11** 전략 $P(9)=2613$임을 이용하여 10보다 작은 자연수 $a$, $b$, $c$, $d$의 값을 구한다.

풀이 $P(9)=a\cdot10^3+b\cdot10^2+c\cdot10+d=2613$이고, $a$, $b$, $c$, $d$는 10보다 작은 자연수이므로

$$a=2,\ b=6,\ c=1,\ d=3$$

$$\therefore P(x)=2(x+1)^3+6(x+1)^2+(x+1)+3=2x^3+12x^2+19x+12$$

오른쪽 조립제법에서 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫은 $2x^2+8x+3$이다.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-2$ | 2 | 12 | 19 | 12 |
| | | $-4$ | $-16$ | $-6$ |
| | 2 | 8 | 3 | 6 |

답 ⑤

**12** 전략 $a$, $b$가 연속하는 두 자연수임을 이용하여 $A$를 $a$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $a$, $b$는 연속하는 두 자연수이므로 $b=a+1$이라 하면

$$A=a^2+b^2+c^2=a^2+(a+1)^2+\{a(a+1)\}^2$$
$$=a^4+2a^3+3a^2+2a+1$$
$$=a^4+a^2+1+2a^3+2a+2a^2$$
$$=(a^2+a+1)^2$$

$c^2=(ab)^2=\{a(a+1)\}^2$

$a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로

$$\sqrt{A}=a^2+a+1=a(a+1)+1$$

이때 연속하는 두 자연수의 곱 $a(a+1)$은 짝수이므로 $\sqrt{A}$는 항상 홀수이고 유리수이다. 답 ③

참고 $b=a-1$이라 하면 $\sqrt{A}=a^2-a+1=a(a-1)+1$이므로 그 결과는 같다.

**13** 전략 주어진 식의 좌변에서 $16=x$로 놓고 좌변을 인수분해한다.

풀이 $16=x$라 하면

$$16^3+2\cdot16^2-2\cdot16+3=x^3+2x^2-2x+3$$

오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-3$ | 1 | 2 | $-2$ | 3 |
| | | $-3$ | 3 | $-3$ |
| | 1 | $-1$ | 1 | 0 |

$$x^3+2x^2-2x+3=(x+3)(x^2-x+1)$$

$x=-3$일 때 이 식의 값이 0이므로 이 식은 $x+3$을 인수로 갖는다.

$$\therefore 16^3+2\cdot16^2-2\cdot16+3=(16+3)(16^2-16+1)=19\cdot241$$

따라서 $a=19$, $b=241$ 또는 $a=241$, $b=19$이므로

$$a+b=260$$

답 ③

**14** 전략 나머지정리를 이용하여 $b$를 $a$에 대한 식으로 나타낸 후 $x^{10}(x^2+ax+b)$를 인수분해한다.

풀이 $x^{10}(x^2+ax+b)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^{10}(x^2+ax+b)=(x-2)^2Q(x)+2^{10}(x-2)$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^{10}(4+2a+b)=0$

$\therefore b=-2a-4$ …… ㉠

이때

$x^{10}(x^2+ax+b)=x^{10}(x^2+ax-2a-4)$

$=x^{10}(x-2)(x+a+2)$

이므로

$x^{10}(x-2)(x+a+2)=(x-2)^2Q(x)+2^{10}(x-2)$

$x\neq2$일 때도 등식이 성립하므로

$x^{10}(x+a+2)=(x-2)Q(x)+2^{10}$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^{10}(a+4)=2^{10}$

이므로 $a+4=1$ $\therefore a=-3$

따라서 ㉠에서

$b=-2\cdot(-3)-4=2$

$\therefore ab=-6$ 답 ①

$x$에 대한 항등식이므로 $x=2$, $x\neq2$일 때도 모두 등식이 성립해야 한다.

**15** 전략 인수정리를 이용하여 $c$를 $b$에 대한 식으로 나타낸 후 $ax^3+bx^2-4ax+c$를 인수분해한다.

풀이 $P(x)=ax^4+bx^3+cx-16a$라 하면 $P(x)$가 $x+2$를 인수로 가지므로 $P(-2)=0$

$16a-8b-2c-16a=0$

$\therefore c=-4b$

$\therefore ax^3+bx^2-4ax+c$

$=ax^3+bx^2-4ax-4b$

$=ax(x^2-4)+b(x^2-4)$

$=(x^2-4)(ax+b)$

$=(x+2)(x-2)(ax+b)$

따라서 항상 $ax^3+bx^2-4ax+c$의 인수인 것은 ④이다. 답 ④

**16** 전략 $24x^3+22x^2-x-3$의 값이 0이 되도록 하는 $x$의 값을 찾아 조립제법을 이용하여 인수분해한다.

풀이 $P(x)=24x^3+22x^2-x-3$이라 하면

$P\left(-\frac{1}{2}\right)=-3+\frac{11}{2}+\frac{1}{2}-3=0$

$\pm\frac{(3의\ 약수)}{(24의\ 약수)}$ 중에서 찾는다.

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

| $-\frac{1}{2}$ | 24 | 22 | $-1$ | $-3$ |
|---|---|---|---|---|
| | | $-12$ | $-5$ | 3 |
| | 24 | 10 | $-6$ | 0 |

$\therefore P(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)(24x^2+10x-6)$

$=(2x+1)(12x^2+5x-3)$

$=(2x+1)(4x+3)(3x-1)$

$\therefore a+b+c+d+e+f$

$=2+1+4+3+3+1$

$=14$ 답 ②

$e=3$, $f=1$이고 $a=2$, $b=1$, $c=4$, $d=3$ 또는 $a=4$, $b=3$, $c=2$, $d=1$이다.

**17** 전략 $P(x)$의 식에 $x$ 대신 $2x+1$을 대입하여 $P(2x+1)$의 식을 구한다.

풀이 $A(x)=x^3+3x^2-13x-15$라 하면 $A(-1)=0$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $A(x)$를 인수분해하면

| $-1$ | 1 | 3 | $-13$ | $-15$ |
|---|---|---|---|---|
| | | $-1$ | $-2$ | 15 |
| | 1 | 2 | $-15$ | 0 |

$A(x)=(x+1)(x^2+2x-15)$

$=(x+1)(x+5)(x-3)$

다항식 $P(x)$를 $A(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(x+1)(x+5)(x-3)Q(x)+x^2+1$

이므로

$P(2x+1)$

$=(2x+1+1)(2x+1+5)(2x+1-3)Q(2x+1)+(2x+1)^2+1$

$=8(x+1)(x+3)(x-1)Q(2x+1)+4x^2+4x+2$

$=(x^2-1)\cdot8(x+3)Q(2x+1)+4(x^2-1)+4x+6$

따라서 다항식 $P(2x+1)$을 $x^2-1$로 나누었을 때의 나머지는 $4x+6$이므로

$R(x)=4x+6$

$\therefore R(3)=4\cdot3+6=18$ 답 ④

다른 풀이 다항식 $P(2x+1)$을 $x^2-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ ($a$, $b$는 상수)라 하면

$P(2x+1)=(x^2-1)Q_1(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$P(-1)=-a+b$

이때 $P(-1)=2$이므로

$-a+b=2$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$P(3)=a+b$

이때 $P(3)=10$이므로

$a+b=10$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=6$

따라서 $R(x)=4x+6$이므로

$R(3)=4\cdot3+6=18$

$P(x)=(x+1)(x+5)(x-3)\times Q(x)+x^2+1$의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $P(-1)=2$
양변에 $x=3$을 대입하면 $P(3)=10$

**18** 전략 $(P\ominus Q)\otimes P$를 전개한 후 $P=x+y$, $Q=x-y$를 대입한다.

풀이 $(P\ominus Q)\otimes P$

$=(P+2Q)\otimes P$

$=\{(P+2Q)+P\}(P+2Q)$

$=(2P+2Q)(P+2Q)$

$=2P^2+6PQ+4Q^2$ …❶

$=2(x+y)^2+6(x+y)(x-y)+4(x-y)^2$

$=12x^2-4xy$ …❷

따라서 $xy$의 계수는 $-4$이다. …❸

답 $-4$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $(P\ominus Q)\otimes P$를 $P$, $Q$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 40 % |
| ❷ $(P\ominus Q)\otimes P$를 $x$, $y$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 40 % |
| ❸ $xy$의 계수를 구할 수 있다. | 20 % |

**다른 풀이** $(P\ominus Q)\otimes P$

$$=(P+2Q)\otimes P$$
$$=(2P+2Q)(P+2Q)$$
$$=\{2(x+y)+2(x-y)\}\{x+y+2(x-y)\}$$
$$=4x(3x-y)$$
$$=12x^2-4xy$$

**19** **전략** 세 정사각형 $A$, $B$, $C$의 넓이와 색칠한 부분의 넓이의 총합은 한 변의 길이가 10인 정사각형의 넓이와 같음을 이용한다.

**풀이** 세 정사각형 $A$, $B$, $C$의 한 변의 길이를 각각 $a$, $b$, $c$라 하면

$$a+b+c=10$$

세 정사각형 $A$, $B$, $C$의 넓이의 합이 색칠한 부분의 넓이와 같으므로 세 정사각형 $A$, $B$, $C$의 넓이의 합은 한 변의 길이가 10인 정사각형의 넓이의 $\frac{1}{2}$이다.

$$\therefore a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2}\cdot 10^2=50$$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$$10^2=50+2(ab+bc+ca)$$
$$\therefore ab+bc+ca=25$$

$p=\sqrt{2}a$, $q=\sqrt{2}b$, $r=\sqrt{2}c$이므로

$$pq+qr+rp=2ab+2bc+2ca$$
$$=2(ab+bc+ca)$$
$$=2\cdot 25$$
$$=50$$

답 50

한 변의 길이가 $a$인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}a$이다.

**20** **전략** $2x^2+x+4$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $px+q$임을 이용한다.

**풀이** $P(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$P(x)=(x-1)^3Q(x)+2x^2+x+4$$
$$=(x-1)(x-1)^2Q(x)+2x^2+x+4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

⋯ ❶

이때 $P(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $px+q$이므로 ㉠에서

$$P(x)=(x-1)(x-1)^2Q(x)+2(x-1)^2+px+q$$

즉 $2(x-1)^2+px+q=2x^2+x+4$이므로

$$2x^2+(p-4)x+q+2=2x^2+x+4$$
$$p-4=1,\ q+2=4$$
$$\therefore p=5,\ q=2 \quad ⋯ ❷$$
$$\therefore p^2+q^2=5^2+2^2=29 \quad ⋯ ❸$$

답 29

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $P(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 $P(x)$를 나타낼 수 있다. | 30 % |
| ❷ $p$, $q$의 값을 구할 수 있다. | 60 % |
| ❸ $p^2+q^2$의 값을 구할 수 있다. | 10 % |

**21** **전략** 주어진 등식을 변형하여 $P(1)=2P(2)=3P(3)$임을 이용한다.

**풀이** $\frac{P(1)}{30}=\frac{P(2)}{15}=\frac{P(3)}{10}=\frac{1}{6}$의 각 변에 30을 곱하면

$$P(1)=2P(2)=3P(3)=5$$

이므로

$$P(1)-5=2P(2)-5=3P(3)-5=0$$

따라서 $A(x)=xP(x)-5$라 하면 $A(x)$는 삼차식이고

$$A(1)=A(2)=A(3)=0$$

이므로

$$A(x)=k(x-1)(x-2)(x-3)\ (k\neq 0)$$

이라 할 수 있다.

$$\therefore xP(x)=k(x-1)(x-2)(x-3)+5$$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$0=-6k+5 \qquad \therefore k=\frac{5}{6}$$

따라서 $xP(x)=\frac{5}{6}(x-1)(x-2)(x-3)+5$이고

$P(x)$를 $x-6$으로 나누었을 때의 나머지는 $P(6)$이므로 양변에 $x=6$을 대입하면

$$6P(6)=\frac{5}{6}\cdot 5\cdot 4\cdot 3+5=55$$
$$\therefore P(6)=\frac{55}{6}$$

답 $\frac{55}{6}$

**1등급 비밀노트**

$n$차 다항식 $P(x)$가 $n$개의 서로 다른 실수 $a_1$, $a_2$, $\cdots$, $a_n$에 대하여 $P(a_1)=P(a_2)=\cdots=P(a_n)=0$이면 $P(x)$는 $x-a_1$, $x-a_2$, $\cdots$, $x-a_n$으로 나누어떨어지므로

$$P(x)=k(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\ (k\neq 0)$$

**22** **전략** $3A(x)-B(x)$와 $B(x)$를 몫과 나머지를 이용하여 나타낸 후, 두 등식을 이용하여 $A(x)$를 구한다.

**풀이** $3A(x)-B(x)$를 $x^2+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ ($a$, $b$는 상수)라 하면

$$3A(x)-B(x)=(x^2+1)Q_1(x)+ax+b \quad \cdots\cdots ㉠$$

$B(x)$를 $x^2+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$$B(x)=(x^2+1)Q_2(x)+ax+b \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$3A(x)=(x^2+1)\{Q_1(x)+Q_2(x)\}+2ax+2b$$
$$\therefore A(x)=\frac{1}{3}(x^2+1)\{Q_1(x)+Q_2(x)\}+\frac{2}{3}ax+\frac{2}{3}b$$

$R(x)$는 다항식 $3A(x)-B(x)$를 이차식으로 나누었을 때의 나머지이므로 일차 이하의 다항식이다.

즉 $A(x)$를 $x^2+1$로 나누었을 때의 나머지는

$\frac{2}{3}ax+\frac{2}{3}b$이므로

$$\frac{2}{3}a=2,\ \frac{2}{3}b=-6 \qquad \therefore a=3,\ b=-9$$

따라서 $R(x)=3x-9$이므로

$R(5)=3\cdot5-9=6$ 답 6

**23** 전략 두 다항식을 $(x-a)(x-b)$로 나누었을 때의 나머지가 서로 같으므로 각 식에 $x=a$, $x=b$를 대입한 값이 각각 같음을 이용한다.

풀이 $A(x)=x^3+x^2-5x+1$,
$B(x)=x^3-x^2-3x+13$이라 하면 두 다항식 $A(x)$, $B(x)$를 각각 $(x-a)(x-b)$로 나누었을 때의 나머지가 서로 같으므로

$$A(a)=B(a),\ A(b)=B(b)$$

$A(a)=B(a)$에서

$$a^3+a^2-5a+1=a^3-a^2-3a+13$$
$$2a^2-2a-12=0,\quad a^2-a-6=0$$
$$(a+2)(a-3)=0 \qquad \therefore a=-2 \text{ 또는 } a=3$$

마찬가지로 $A(b)=B(b)$에서

$b=-2$ 또는 $b=3$

그런데 $a\neq b$이므로

$a=-2,\ b=3$ 또는 $a=3,\ b=-2$

다항식 $A(x)=x^3+x^2-5x+1$을 $(x+2)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $px+q$($p$, $q$는 상수)라 하면

$$A(x)=(x+2)(x-3)Q(x)+px+q \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$$7=-2p+q \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

$A(-2)=-8+4+10+1=7$

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$$22=3p+q \qquad \cdots\cdots \text{㉢}$$

$A(3)=27+9-15+1=22$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$p=3,\ q=13$

따라서 $R(x)=3x+13$이므로

$R(a+b)=R(1)=16$ 답 16

$a=-2,\ b=3$ 또는 $a=3,\ b=-2$일 때 $a+b=1$

참고 두 다항식 $A(x)$, $B(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라 하면

$$A(x)=(x-a)(x-b)Q_1(x)+R(x)$$
$$B(x)=(x-a)(x-b)Q_2(x)+R(x)$$
$$\therefore A(a)=R(a)=B(a),\ A(b)=R(b)=B(b)$$

**24** 전략 $P(x)$를 $(x-1)(x-3)$, $(x-1)(x-2)(x-3)$으로 나누었을 때의 나머지를 이용하여 $R(x)$의 식을 세운다.

풀이 삼차식 $P(x)$를 $(x-1)(x-2)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $q$ ($q\neq0$)라 하면

$$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdot q+R(x) \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$P(x)$가 삼차식이고 나누는 식이 삼차식이므로 몫은 0이 아닌 실수이다.

$P(x)$를 $(x-1)(x-3)$으로 나누었을 때의 나머지가 $3x-3$이므로 ㉠에서 $R(x)$를 $(x-1)(x-3)$으로 나누었을 때의 나머지는 $3x-3$이다.

즉 $R(x)=a(x-1)(x-3)+3x-3$ ($a$는 상수)이라 하면 ㉠에서

$$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdot q$$
$$+a(x-1)(x-3)+3x-3$$

이때 $P(x)$는 $(x-1)(x-2)$로 나누어떨어지므로

$P(1)=0,\ P(2)=0$

$P(2)=0$에서

$$-a+6-3=0 \qquad \therefore a=3$$

따라서

$$R(x)=3(x-1)(x-3)+3x-3$$

이므로

$R(4)=3\cdot3\cdot1+3\cdot4-3=18$ 답 18

**25** 전략 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$이므로 $P(1)$, $P(2)$의 값을 이용하여 $R(x)$를 구한다.

풀이 삼차식 $P(x)$를 $x^2-3x+2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ ($a$, $b$는 상수)라 하면

$$P(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$$
$$=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b \qquad \cdots \text{❶}$$

이때 $P(0)=3,\ P(x+1)=P(x)+3(x^2+x)$이므로

$$P(1)=P(0)+3(0+0)=3+0=3,$$
$$P(2)=P(1)+3(1+1)=3+6=9 \qquad \cdots \text{❷}$$

$x=1,\ x=2$를 $P(x)$에 각각 대입하면

$$a+b=3,\ 2a+b=9$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=6,\ b=-3 \qquad \cdots \text{❸}$$

따라서 $R(x)=6x-3$이므로

$$R(3)=6\cdot3-3=15 \qquad \cdots \text{❹}$$

답 15

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $P(x)$를 $x^2-3x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용해서 $P(x)$를 나타낼 수 있다. | 30 % |
| ❷ $P(1)$, $P(2)$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❸ $a$, $b$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❹ $R(3)$의 값을 구할 수 있다. | 10 % |

**26** 전략 주어진 식을 전개하여 $x$ 또는 $y$에 대하여 내림차순으로 정리한다.

풀이 $(x+3)^2+(2y-3)^2-4xy+k$

$$=x^2+6x+9+4y^2-12y+9-4xy+k$$
$$=x^2+2(3-2y)x+4y^2-12y+18+k$$

위의 식이 $x$, $y$에 대한 완전제곱식이 되려면

$$(3-2y)^2=4y^2-12y+18+k,$$
$$\text{즉 } 4y^2-12y+9=4y^2-12y+18+k$$

이어야 하므로 $9=18+k$

$\therefore k=-9$ 답 $-9$

$x^2+ax+b$가 완전제곱식으로 인수분해되려면 $\left(\frac{a}{2}\right)^2=b$

다른 풀이 $(x+3)^2+(2y-3)^2-4xy+k$

$=4y^2-4(x+3)y+x^2+6x+18+k$

위의 식이 $x$, $y$에 대한 완전제곱식이 되려면

$(x+3)^2=x^2+6x+18+k$

이어야 하므로

$9=18+k \qquad \therefore k=-9$

참고 주어진 식을 인수분해하면 $(x-2y+3)^2$이다.

## 27

전략 $12=x$로 놓고 주어진 등식의 좌변을 $x$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $12=x$라 하면

$12\cdot13\cdot14\cdot15-8$
$=x(x+1)(x+2)(x+3)-8$
$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)-8$

$x^2+3x=X$로 놓으면

$12\cdot13\cdot14\cdot15-8$
$=X(X+2)-8$
$=X^2+2X-8$
$=(X+4)(X-2)$
$=(x^2+3x+4)(x^2+3x-2)$
$=(12^2+3\cdot12+4)(12^2+3\cdot12-2)$
$=(144+36+4)(144+36-2)$
$=184\cdot178$
$=(2^3\cdot23)\cdot(2\cdot89)$
$=2^4\cdot23\cdot89$

이때 $2^4\cdot23\cdot89$의 양의 약수의 개수는

$(4+1)(1+1)(1+1)=20$

이므로 두 자연수 $a$, $b$의 순서쌍 $(a, b)$의 개수는 20이다. 답 20

자연수 $N$이
$N=p^aq^b\cdots r^c$
($p$, $q$, $\cdots$, $r$는 서로 다른 소수)
으로 소인수분해되면 $N$의 양의 약수의 개수는
$(a+1)(b+1)\cdots(c+1)$

**1등급 비밀노트**

$2^4\cdot23\cdot89$의 양의 약수 중 1개를 $a$로 택하면 $b$가
$b=(2^4\cdot23\cdot89)\div a$
로 결정되므로 두 자연수 $a$, $b$의 순서쌍 $(a, b)$의 개수는 $a$를 택하는 경우의 수, 즉 $2^4\cdot23\cdot89$의 양의 약수의 개수와 같다.

## 28

전략 주어진 조건을 이용하여 $a$, $b$ 사이의 관계식을 세우고 이것을 만족시키는 자연수 $a$, $b$의 값을 찾는다.

풀이 $\overline{FC}=b-a$, $\overline{DH}=a-(b-a)=2a-b$이므로

두 정사각형 ABFE, IJHD의 넓이의 차는

$a^2-(2a-b)^2=(a+2a-b)(a-2a+b)$
$=(3a-b)(b-a)$

$\therefore (3a-b)(b-a)=35$

이때 $3a-b$, $b-a$는 정수이고

$0<b-a<3a-b$

이므로

$3a-b=35$, $b-a=1$ 또는
$3a-b=7$, $b-a=5$ ···· ❶

$a<\frac{3}{2}a<b$이므로
$0<b-a$
$b<2a$이므로
$2b<4a$
$2b-(a+b)$
$<4a-(a+b)$
$\therefore b-a<3a-b$

(i) $3a-b=35$, $b-a=1$일 때,
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=18$, $b=19$
그런데 $\frac{3}{2}a<b$를 만족시키지 않는다.

$\frac{3}{2}\cdot18>19$

(ii) $3a-b=7$, $b-a=5$일 때,
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=6$, $b=11$

(i), (ii)에서

$a=6$, $b=11$ ···· ❷

따라서 $\overline{GJ}=(b-a)-(2a-b)=2b-3a$이므로 두 사각형 GFCH, EGJI의 넓이의 합은

$(b-a)^2+(2b-3a)(2a-b)$
$=5^2+4\cdot1=29$ ···· ❸

답 29

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $3a-b$, $b-a$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❷ $a$, $b$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❸ 두 사각형의 넓이의 합을 구할 수 있다. | 20 % |

## 29

전략 먼저 $P(2)=0$임을 이용하여 $P(x)$를 인수분해한다.

풀이 $P(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -a-2 & 3a+5 & -2a-10 \\ & & 2 & -2a & 2a+10 \\ \hline & 1 & -a & a+5 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(x^2-ax+a+5)$ ···· ❶

이때

$(x-2)(x^2-ax+a+5)$
$=(x-p)(x-q)(x-r)$

이고 $p$, $q$, $r$는 연속하는 세 자연수이므로 2를 포함한 연속하는 세 자연수는

$1, 2, 3$ 또는 $2, 3, 4$

$Q(x)=x^2-ax+a+5$라 하면

$Q(x)=(x-1)(x-3)$ 또는
$Q(x)=(x-3)(x-4)$

따라서 $Q(3)=0$이므로

$9-3a+a+5=0, \qquad -2a+14=0$

$\therefore a=7$ ···· ❷

$Q(x)=x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$이므로

$P(x)=(x-2)(x-3)(x-4)$

$\therefore a+p+q+r=7+2+3+4=16$ ···· ❸

$Q(x)=(x-1)(x-3)$
$=x^2-4x+3$
일 때는
$x^2-ax+a+5$
$=x^2-4x+3$
을 만족시키는 $a$의 값이 존재하지 않는다.

답 16

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $P(x)$를 인수분해할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $a$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❸ $a+p+q+r$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |

## 최상위로 가는 최고 수준 문제

본책 27쪽

### 01

**해결 단계**

❶ $P_k$를 10의 거듭제곱을 이용하여 나타낸다.
❷ $P_n$을 $P_4$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 나타낸 후 정리하여 $n$의 값을 구한다.
❸ $P_n$을 $P_5$를 포함한 식으로 인수분해하여 $r$의 값을 구한다.
❹ $n+r$의 값을 구한다.

풀이 ❶ $P_1=9=10-1$,

$P_2=99=10^2-1$,

$P_3=999=10^3-1$,

⋮

$P_k=10^k-1$

❷ $P_n$을 $P_4$로 나누었을 때의 몫은 $10^{11}+10^7+10^3$이고 나머지는 $P_3$이므로

$$\begin{aligned}P_n&=P_4(10^{11}+10^7+10^3)+P_3\\&=(10^4-1)(10^{11}+10^7+10^3)+10^3-1\\&=10^3(10^4-1)(10^8+10^4+1)+10^3-1\\&=10^3(10^{12}-1)+10^3-1\\&=10^{15}-10^3+10^3-1\\&=10^{15}-1=P_{15}\end{aligned}$$

> $10^4=a$라 하면
> $(10^4-1)(10^8+10^4+1)$
> $=(a-1)(a^2+a+1)$
> $=a^3-1$
> $=(10^4)^3-1$
> $=10^{12}-1$

$\therefore n=15$

❸ $P_n=10^{15}-1$

$$\begin{aligned}&=(10^5-1)(10^{10}+10^5+1)\\&=P_5(10^{10}+10^5+1)\end{aligned}$$

에서 $P_n$은 $P_5$로 나누어떨어지므로 $r=0$

❹ $\therefore n+r=15$

답 ①

### 02

**해결 단계**

❶ $P(x)$를 $x^2-1$, $x^3+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 $P(x)$를 각각 나타낸다.
❷ ❶의 두 식에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하여 $a$, $b$에 대한 두 식을 구하고, 두 식을 연립하여 $a$, $b$의 값을 구한다.
❸ $a$, $b$의 값을 ❶의 식에 각각 대입한 두 식이 같음을 이용하여 항등식을 세운다.
❹ 조건 (다)를 이용하여 $A(x)$를 구한다.
❺ $A(x)$를 $x^2-x+1$로 나누었을 때의 나머지를 구한다.

풀이 ❶ 조건 (가)에서

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^2-1)A(x)+ax+4\\&=(x+1)(x-1)A(x)+ax+4\end{aligned}$$
…… ㉠

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^3+1)B(x)+x^2+2x+b\\&=(x+1)(x^2-x+1)B(x)+x^2+2x+b\end{aligned}$$
…… ㉡

❷ ㉠, ㉡의 양변에 $x=-1$을 각각 대입하면

$P(-1)=-a+4$, $P(-1)=b-1$

이므로 $-a+4=b-1$

$\therefore a+b=5$ …… ㉢

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$P(1)=a+4$

한편 조건 (다)에서 나머지정리에 의하여 $B(1)=-1$이므로 ㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면 $P(1)=1+b$

> $P(1)=2\cdot1\cdot B(1)$
> $+1+2+b$
> $=1+b$

즉 $a+4=1+b$이므로

$\therefore a-b=-3$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=4$

❸ 따라서 ㉠, ㉡에 의하여

$$\begin{aligned}&(x+1)(x-1)A(x)+x+4\\&=(x+1)(x^2-x+1)B(x)+x^2+2x+4\\&(x+1)(x-1)A(x)\\&=(x+1)(x^2-x+1)B(x)+x^2+x\\&(x+1)(x-1)A(x)\\&=(x+1)(x^2-x+1)B(x)+x(x+1)\end{aligned}$$

$x\neq-1$일 때도 등식이 성립해야 하므로

$(x-1)A(x)=(x^2-x+1)B(x)+x$

❹ 이때 $B(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$B(x)=(x-1)Q(x)-1$

이므로

$$\begin{aligned}&(x-1)A(x)\\&=(x^2-x+1)\{(x-1)Q(x)-1\}+x\\&=(x^2-x+1)(x-1)Q(x)-x^2+x-1+x\\&=(x^2-x+1)(x-1)Q(x)-(x^2-2x+1)\\&=(x^2-x+1)(x-1)Q(x)-(x-1)^2\end{aligned}$$

$x\neq1$일 때도 등식이 성립해야 하므로

$A(x)=(x^2-x+1)Q(x)-x+1$

❺ $A(x)$를 $x^2-x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$-x+1$

답 $-x+1$

### 03

**해결 단계**

❶ 주어진 등식의 좌변을 인수분해한다.
❷ $a$, $b$, $c$가 자연수임을 이용하여 $a-b$, $a+b$가 모두 짝수이거나 모두 홀수임을 안다.
❸ 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a, b, c)$의 개수를 구한다.

풀이 ❶ $a^3-b^3+(a^2-b^2)c+a^2b-ab^2$

$$\begin{aligned}&=a^3-b^3+a^2c-b^2c+a^2b-ab^2\\&=a^3+a^2c+a^2b-b^3-b^2c-ab^2\\&=a^2(a+c+b)-b^2(b+c+a)\\&=(a^2-b^2)(a+b+c)\\&=(a+b)(a-b)(a+b+c)\end{aligned}$$

이므로

$(a+b)(a-b)(a+b+c)=120$

❷ 이때 $a+b>0$, $a+b+c>0$이므로 $a-b>0$

또 $a-b$, $a+b$, $a+b+c$는 모두 자연수이다.

> 두 자연수 $a$, $b$에 대하여 $a-b>0$이므로 $a-b$는 양의 정수, 즉 자연수이다.

이때 $a-b=p,\ a+b=q$ ($p,\ q$는 자연수)라 하면

$$a=\frac{p+q}{2},\ b=\frac{q-p}{2}$$

이고 $a,\ b$는 자연수이므로 $p,\ q$는 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다. 즉 $a-b,\ a+b$는 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다.

❸ $120=2^3\cdot3\cdot5$이고 $a-b<a+b<a+b+c$이므로 이것을 만족시키는 $a-b,\ a+b,\ a+b+c$의 값은 다음과 같다.

| $a-b$ | $a+b$ | $a+b+c$ |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 40 |
| | 5 | 24 |
| 2 | 4 | 15 |
| | 6 | 10 |
| 3 | 5 | 8 |

따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 5이다.

답 5

참고 각 경우의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$를 차례대로 구하면
$(2,\ 1,\ 37),\ (3,\ 2,\ 19),\ (3,\ 1,\ 11),\ (4,\ 2,\ 4),\ (4,\ 1,\ 3)$

## 04

해결 단계

❶ $P(x)$를 $x^2+x+1$로 나누었을 때의 나머지를 이용하여 식을 변형한다.
❷ $P(1)=14$임을 이용하여 구한 $a$의 값을 ❶의 식에 대입하여 $P(x)$를 구한다.
❸ $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 구한다.

풀이 ❶ $P(x)=x^{20}+x^{18}+x^{16}+ax^2+bx+c$

$$=x^{16}(x^4+x^2+1)+ax^2+bx+c$$
$$=x^{16}(x^2+x+1)(x^2-x+1)+ax^2+bx+c$$

이고, $x^{16}(x^2+x+1)(x^2-x+1)$은 $x^2+x+1$로 나누어떨어지므로 $P(x)$를 $x^2+x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $ax^2+bx+c$를 $x^2+x+1$로 나누었을 때의 나머지와 같다.

이때 그 나머지가 $2x+3$이므로

$$ax^2+bx+c=a(x^2+x+1)+2x+3$$
$$\therefore P(x)=x^{16}(x^2+x+1)(x^2-x+1)+a(x^2+x+1)+2x+3$$

❷ $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 14이므로 $P(1)=14$에서

$$3+3a+5=14 \qquad \therefore a=2$$
$$\therefore P(x)=x^{16}(x^2+x+1)(x^2-x+1)+2(x^2+x+1)+2x+3$$
$$=x^{16}(x^2+x+1)(x^2-x+1)+2x^2+4x+5$$

❸ 따라서 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$$P(-1)=1\cdot1\cdot3+2-4+5=6$$

답 ②

일품 BOX

$a,\ b$가 자연수이므로 $p+q,\ q-p$는 2의 배수, 즉 짝수이어야 한다. 따라서 $p,\ q$는 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다.

두 복소수 $a+bi,\ c+di$ ($a,\ b,\ c,\ d$는 실수)가 서로 같을 조건
➡ $a=c,\ b=d$

복소수의 덧셈은 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 계산한다.

# Ⅱ 방정식

## 03 복소수

### 개념 & 핵심 기출

본책 30~32쪽

**01** $z=(i+1)a^2-(i+8)a-6i+15$

$$=(a^2-8a+15)+(a^2-a-6)i$$

$z$가 순허수이려면

$$a^2-8a+15=0,\ a^2-a-6\neq0$$

$a^2-8a+15=0$에서 $(a-3)(a-5)=0$

$\therefore a=3$ 또는 $a=5$ …… ㉠

$a^2-a-6\neq0$에서 $(a+2)(a-3)\neq0$

$\therefore a\neq-2,\ a\neq3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=5$

답 ⑤

**02** 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$6x-2=2y,\ 4x+3=3y-4$$
$$\therefore 3x-y=1,\ 4x-3y=-7$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=2,\ y=5$

$\therefore xy=10$

답 10

**03** 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a^2+b^2=3,\ ab=1$$

이때 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=3+2\cdot1=5$이므로

$a+b=\sqrt{5}$ ($\because a>0,\ b>0$)

답 ④

**04** $z_1=(1+5i)x^2-4x-5-4i$

$$=(x^2-4x-5)+(5x^2-4)i$$

$z_2=(1-4i)x^2+x+3=(x^2+x+3)-4x^2i$

$\therefore z_1+z_2=(2x^2-3x-2)+(x^2-4)i$

이때 $z_1+z_2$가 실수이므로 $x^2-4=0$에서

$(x+2)(x-2)=0 \qquad \therefore x=2$ ($\because x>0$)

답 2

**05** $p=\alpha+\beta=(3-2i)+(-1+3i)=2+i$

$q=\beta-\alpha=(-1+3i)-(3-2i)=-4+5i$

$$\therefore 2p-q=2(2+i)-(-4+5i)$$
$$=4+2i+4-5i=8-3i$$

따라서 $2p-q$의 허수부분은 $-3$이다.

답 ②

다른 풀이 $p=\alpha+\beta,\ q=\beta-\alpha$이므로

$$2p-q=2(\alpha+\beta)-(\beta-\alpha)=3\alpha+\beta$$
$$=3(3-2i)+(-1+3i)=8-3i$$

**06** $\beta=a+bi$ ($a,\ b$는 실수)라 하자.

$\alpha+\beta=(2-3i)+(a+bi)=(2+a)+(-3+b)i$

이때 조건 (가)에서

$-3+b=0 \qquad \therefore b=3$

$\alpha-\beta=(2-3i)-(a+bi)=(2-a)+(-3-b)i$

이때 조건 (나)에서

$2-a=5 \qquad \therefore a=-3$

$\therefore \beta=-3+3i$ 답 $-3+3i$

**07** $(2x+i)(3+2i)=-8+yi$에서

$(6x-2)+(4x+3)i=-8+yi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$6x-2=-8,\ 4x+3=y$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=-1,\ y=-1$

$\therefore x+y=-2$ 답 ①

**08** $z=\dfrac{2-ai}{3-i}=\dfrac{(2-ai)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$

$=\dfrac{(6+a)+(2-3a)i}{10}$

$=\dfrac{6+a}{10}+\dfrac{2-3a}{10}i$

복소수 $z$의 실수부분과 허수부분이 같으므로

$\dfrac{6+a}{10}=\dfrac{2-3a}{10}, \qquad 6+a=2-3a$

$\therefore a=-1$ 답 $-1$

**09** $x^2=\left(\dfrac{i}{1+i}\right)^2=\dfrac{i^2}{(1+i)^2}=-\dfrac{1}{2i},$

$y^2=\left(\dfrac{i}{1-i}\right)^2=\dfrac{i^2}{(1-i)^2}=\dfrac{-1}{-2i}=\dfrac{1}{2i}$

이므로 $x^2+y^2=-\dfrac{1}{2i}+\dfrac{1}{2i}=0$ 답 ③

다른 풀이 $x+y=\dfrac{i}{1+i}+\dfrac{i}{1-i}$

$=\dfrac{i(1-i)+i(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2i}{2}=i$

$xy=\dfrac{i^2}{(1+i)(1-i)}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=i^2-2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$=-1+1=0$

**10** $z=a+bi$ ($a$, $b$는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$(1-i)\overline{z}+2iz=(1-i)(a-bi)+2i(a+bi)$

$=a-bi-ai-b+2ai-2b$

$=(a-3b)+(a-b)i$

따라서 $(a-3b)+(a-b)i=4+2i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a-3b=4,\ a-b=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-1$

$\therefore z=1-i$ 답 $1-i$

일품 BOX

복소수 $z$의 켤레복소수를 $\overline{z}$라 할 때, $\overline{(\overline{z})}=z$

복소수와 그 켤레복소수의 곱은 항상 실수이다.

$z_1\overline{z_2}=1$에서 $\dfrac{1}{z_1}=\overline{z_2}$

**11** $\overline{z_1}-\overline{z_2}=\overline{z_1-z_2}=2+5i$이므로

$z_1-z_2=2-5i$

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=\overline{z_1z_2}=3-4i$이므로

$z_1z_2=3+4i$

$\therefore (z_1-2)(z_2+2)=z_1z_2+2(z_1-z_2)-4$

$=(3+4i)+2(2-5i)-4$

$=3-6i$ 답 $3-6i$

**12** ㄱ. $z_1=\overline{z_2}$이면 $z_1z_2=\overline{z_2}z_2$

따라서 $z_1z_2$는 실수이다.

ㄴ. $z_1+z_2=0$에서 $\overline{z_1+z_2}=\overline{0}$

$\therefore \overline{z_1}+\overline{z_2}=0$

ㄷ. $z_1\overline{z_2}=1$이면 $z_1=\dfrac{1}{\overline{z_2}}$이므로

$\overline{z_1}=\overline{\left(\dfrac{1}{\overline{z_2}}\right)}=\dfrac{1}{z_2}$

또 $z_1\overline{z_2}=1$이면 $\overline{z_2}=\dfrac{1}{z_1}$이므로

$\overline{z_1}+\dfrac{1}{z_1}=\dfrac{1}{z_2}+\overline{z_2}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

다른 풀이 $z_1=a+bi,\ z_2=c+di$ ($a$, $b$, $c$, $d$는 실수)라 하자.

ㄱ. $z_1=\overline{z_2}$에서 $a+bi=c-di$이므로

$a=c,\ b=-d$

$\therefore z_1z_2=(c-di)(c+di)=c^2+d^2$

따라서 $z_1z_2$는 실수이다.

ㄴ. $z_1+z_2=0$에서 $(a+bi)+(c+di)=0$

즉 $(a+c)+(b+d)i=0$에서

$a+c=0,\ b+d=0$

$\therefore \overline{z_1}+\overline{z_2}=(a-bi)+(c-di)$

$=(a+c)-(b+d)i=0$

ㄷ. $z_1\overline{z_2}=1$에서 $(a+bi)(c-di)=1$

즉 $(ac+bd)+(bc-ad)i=1$에서

$ac+bd=1,\ bc-ad=0$

이때

$\overline{z_1}z_2=(a-bi)(c+di)$

$=(ac+bd)+(ad-bc)i=1$

이므로 $\overline{z_1}=\dfrac{1}{z_2}$

$\therefore \overline{z_1}+\dfrac{1}{z_1}=\dfrac{1}{z_2}+\overline{z_2}$

**13** $z=a^2(1-i)-a(6-i)+8+2i$

$=(a^2-6a+8)-(a^2-a-2)i$

$z^2$이 음의 실수이려면 $z$가 순허수이어야 하므로

$a^2-6a+8=0,\ a^2-a-2\neq0$

$a^2-6a+8=0$에서 $(a-2)(a-4)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=4$ …… ㉠

$a^2-a-2\neq0$에서 $(a+1)(a-2)\neq0$

$\therefore a\neq-1,\ a\neq2$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $a=4$

따라서 $z=-(4^2-4-2)i=-10i$이므로

$$\left(\frac{z}{5}\right)^{10}=(-2i)^{10}=1024i^{10}=-1024$$

답 $-1024$

**1등급 비밀노트**

복소수 $z=a+bi$ ($a$, $b$는 실수)에 대하여
① $z^2$이 실수 ➡ $z$가 실수 또는 순허수 ➡ $a=0$ 또는 $b=0$
② $z^2$이 음의 실수 ➡ $z$가 순허수 ➡ $a=0,\ b\neq0$
③ $z^2$이 양의 실수 ➡ $z$가 0이 아닌 실수 ➡ $a\neq0,\ b=0$

**14** $z^2=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2i}{2}=i$이므로

$z^{36}=(z^2)^{18}=i^{18}=(i^4)^4\cdot i^2=1\cdot(-1)=-1,$

$\overline{z}^{36}=\overline{z^{36}}=\overline{-1}=-1$

$\therefore z^{36}+\overline{z}^{36}=-2$

답 ③

참고 자연수 $n$과 복소수 $z$에 대하여

$\overline{z}^n=\overline{z^n}$

가 성립한다. (단, $\overline{z}$는 $z$의 켤레복소수이다.)

**15** 자연수 $k$에 대하여

(i) $n=2k$일 때,

$f(n)=f(2k)=i^{4k}-i^{2k}$
$=(i^4)^k-(i^2)^k=1-(-1)^k$

(ii) $n=2k-1$일 때,

$f(n)=f(2k-1)=i^{2k-1+1}$
$=(i^2)^k=(-1)^k$

(i), (ii)에서

$f(2k-1)+f(2k)=(-1)^k+\{1-(-1)^k\}=1$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$
$=\{f(1)+f(2)\}+\{f(3)+f(4)\}$
$+\cdots+\{f(99)+f(100)\}$
$=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{50개}=50$

답 50

다른 풀이 $f(1)=i^2=-1$

$f(2)=i^4-i^2=1+1=2$

$f(3)=i^4=1$

$f(4)=i^8-i^4=1-1=0$

$f(5)=i^6=-1=f(1)$

$f(6)=i^{12}-i^6=1+1=2=f(2)$

⋮

따라서 $f(n)$의 값은 $-1$, 2, 1, 0이 이 순서대로 반복되므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$
$=(-1+2+1+0)\cdot25=50$

**일품 BOX**

① $a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$
② $a>0$, $b<0$일 때, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$

$i^{10}=(i^4)^2\cdot i^2$
$=1\cdot(-1)=-1$

$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{1}{a}}$이므로
$a<0$

실수 $x$에 대하여
$\sqrt{x^2}=|x|$
$=\begin{cases} x & (x\ge0) \\ -x & (x<0)\end{cases}$

실수 $A$, $B$에 대하여
① $A-B>0$이면 $A>B$
② $A-B=0$이면 $A=B$
③ $A-B<0$이면 $A<B$

ㄴ에 의하여 $c^2+d^2\ge cd$

부등식의 양변에 같은 음수를 곱하면 부등호의 방향이 바뀐다.

**16** ㄱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2}=\sqrt{5\cdot(-2)}=\sqrt{-10}$

ㄴ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3}=-\sqrt{(-3)\cdot(-3)}=-\sqrt{3^2}=-3$

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}}=-\sqrt{\frac{2}{-6}}=-\sqrt{-\frac{1}{3}}$

ㄹ. $\frac{\sqrt{-10}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{\frac{-10}{-2}}=\sqrt{5}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ①

**17** $\frac{1}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{1}{a}}$이므로 $a<0$

$\therefore \sqrt{a^2}+(\sqrt{a})^2+\sqrt{-a}\sqrt{a}$
$=\sqrt{a^2}+a+\sqrt{a^2}i=|a|+a+|a|i$
$=-a+a-ai=-ai$

답 ①

**18** 양의 실수 $a$에 대하여 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$이므로

$\sqrt{-a_1}\sqrt{-a_2}\sqrt{-a_3}\cdots\sqrt{-a_{16}}$
$=\sqrt{a_1}i\times\sqrt{a_2}i\times\sqrt{a_3}i\times\cdots\times\sqrt{a_{16}}i$
$=\sqrt{a_1a_2a_3\cdots a_{16}}\cdot i^{16}$
$=\sqrt{16}\cdot(i^4)^4$
$=4\cdot1=4$

답 ④

## 1등급을 위한 고난도 문제

본책 33~35쪽

**01** ㄱ. $b$가 순허수이면 $b=ci$ ($c\neq0$인 실수)로 놓을 수 있으므로

$a^2-b^2=a^2+c^2,\ a^2b^2=-a^2c^2$
$a^2-b^2-a^2b^2=a^2+c^2+a^2c^2>0$
$\therefore a^2-b^2>a^2b^2$

ㄴ. $a$, $b$가 실수이면

$$a^2+b^2-ab=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\ge0$$

$\therefore a^2+b^2\ge ab$ (단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립)

ㄷ. $a$, $b$가 순허수이면 $a=ci$, $b=di$ ($c\neq0$, $d\neq0$인 실수)로 놓을 수 있으므로

$a^2+b^2=-c^2-d^2,\ ab=-cd$

이때 $c^2+d^2\ge cd$이고 $c\neq0$, $d\neq0$이므로

$-c^2-d^2<-cd$

$\therefore a^2+b^2<ab$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

**02** $\langle 2x,\ 2y\rangle+\langle y,\ x\rangle$

$=(2y+2xi)+(x+yi)$
$=(x+2y)+(2x+y)i=4+5i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+2y=4,\ 2x+y=5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=2,\ y=1$

$\therefore xy=2$

답 ③

**03** $\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$ ($a$, $b$, $c$, $d$는 실수)라 하자.

$-\alpha+\beta=-(a+bi)+(c+di)$
$=(-a+c)+(-b+d)i$

이 복소수가 실수이려면

$-b+d=0 \quad \therefore b=d$ …… ㉠ ⋯ ❶

$(\alpha+\beta)+i=\{(a+bi)+(c+di)\}+i$
$=(a+c)+(b+d+1)i$

이 복소수가 실수이려면

$b+d+1=0$ …… ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$b=-\dfrac{1}{2},\ d=-\dfrac{1}{2}$ ⋯ ❸

따라서

$\alpha-2\beta=(a+bi)-2(c+di)$
$=(a-2c)+(b-2d)i$

에서 $\alpha-2\beta$의 허수부분은

$b-2d=-\dfrac{1}{2}-2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ ⋯ ❹

답 $\dfrac{1}{2}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $-\alpha+\beta$가 실수일 조건을 구할 수 있다. | 30% |
| ❷ $(\alpha+\beta)+i$가 실수일 조건을 구할 수 있다. | 30% |
| ❸ $b$, $d$의 값을 구할 수 있다. | 10% |
| ❹ $\alpha-2\beta$의 허수부분을 구할 수 있다. | 30% |

**04** $z\hat{z}+1=(a+bi)(b+ai)+1=1+(a^2+b^2)i$,

$z+\hat{z}=(a+bi)+(b+ai)=a+b+(a+b)i$

이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$1=a+b,\ a^2+b^2=a+b$

$\therefore a^2+b^2=1$ 답 1

다른 풀이 $z\hat{z}+1=z+\hat{z}$이므로

$z\hat{z}+1-z-\hat{z}=0, \quad z(\hat{z}-1)-(\hat{z}-1)=0$

$(\hat{z}-1)(z-1)=0, \quad \hat{z}-1=0$ 또는 $z-1=0$

실수에서와 마찬가지로 두 복소수 $\alpha$, $\beta$에 대하여 $\alpha\beta=0$이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$이다.

$\therefore \hat{z}=1$ 또는 $z=1$

(i) $\hat{z}=1$일 때, $\quad a=0,\ b=1$

(ii) $z=1$일 때, $\quad a=1,\ b=0$

(i), (ii)에서 $\quad a^2+b^2=1$

참고 복소수 $z$, $w$, $v$에 대하여 다음이 성립한다.

① 교환법칙 $z+w=w+z,\ zw=wz$

② 결합법칙 $(z+w)+v=z+(w+v),\ (zw)v=z(wv)$

③ 분배법칙 $z(w+v)=zw+zv,\ (z+w)v=zv+wv$

**05** $i(x+3i)^2=i(x^2+6xi-9)=-6x+(x^2-9)i$

이 복소수가 자연수이려면 $-6x$는 자연수이고, $x^2-9=0$이어야 한다.

$x^2-9=0$에서 $\quad (x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=3$

(i) $x=-3$일 때,

$-6x=18$이므로 $-6x$는 자연수이다.

(ii) $x=3$일 때,

$-6x=-18$이므로 $-6x$는 자연수가 아니다.

(i), (ii)에서 $\quad x=-3$ 답 $-3$

**06** $f(a,\ b)=\dfrac{a+bi}{a-bi}=\dfrac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)}$
$=\dfrac{(a+bi)^2}{a^2+b^2}$

따라서 자연수 $k$에 대하여

$f(k,\ 2k)=\dfrac{(k+2ki)^2}{k^2+(2k)^2}=\dfrac{k^2(1+2i)^2}{5k^2}$
$=\dfrac{(1+2i)^2}{5}=\dfrac{-3+4i}{5}$

이므로

$f(1,\ 2)=f(2,\ 4)=f(3,\ 6)=\cdots=f(10,\ 20)$
$=\dfrac{-3+4i}{5}$

$\therefore$ (주어진 식)$=10\cdot\dfrac{-3+4i}{5}=-6+8i$ 답 ②

**07** $z+\bar{z}=0$에서 $\bar{z}=-z$이므로 $z$의 실수부분은 0이다.

$z=p+qi$ ($p$, $q$는 실수)라 하면 $\bar{z}=-z$에서
$p-qi=-(p+qi)$
$\therefore p=0$

즉 $z=(a+i)(1+i)=(a-1)+(a+1)i$에서

$a-1=0 \quad \therefore a=1$ 답 1

다른 풀이 $\bar{z}=\overline{(a+i)(1+i)}=(a-i)(1-i)$이므로

$z+\bar{z}=(a+i)(1+i)+(a-i)(1-i)$
$=a+ai+i-1+a-ai-i-1$
$=2a-2$

따라서 $2a-2=0$이므로 $\quad a=1$

**08** 복소수 $z$의 허수부분이 양수이므로

$z=a+bi$ ($a$는 실수, $b>0$)라 하면

$\bar{z}=a-bi$ ⋯ ❶

$z+\bar{z}=6,\ z\bar{z}=10$에서

$2a=6,\ a^2+b^2=10$

$\therefore a=3,\ b=1\ (\because b>0)$ ⋯ ❷

따라서 $z=3+i$, $\bar{z}=3-i$이므로

$\dfrac{z}{\bar{z}}-\dfrac{\bar{z}}{z}=\dfrac{z^2-\bar{z}^2}{z\bar{z}}=\dfrac{(z+\bar{z})(z-\bar{z})}{z\bar{z}}$
$=\dfrac{6\{(3+i)-(3-i)\}}{10}=\dfrac{6}{5}i$ ⋯ ❸

답 $\dfrac{6}{5}i$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $z=a+bi$로 놓고 $\bar{z}$를 $a$, $b$로 나타낼 수 있다. | 20% |
| ❷ $a$, $b$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ $\dfrac{z}{\bar{z}}-\dfrac{\bar{z}}{z}$의 값을 구할 수 있다. | 40% |

**09** $\alpha\bar{\alpha}=\beta\bar{\beta}=5$에서 $\frac{1}{\alpha}=\frac{\bar{\alpha}}{5}$, $\frac{1}{\beta}=\frac{\bar{\beta}}{5}$이므로

$$(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=(\alpha+\beta)\left(\frac{\bar{\alpha}}{5}+\frac{\bar{\beta}}{5}\right)$$
$$=\frac{1}{5}(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})$$
$$=\frac{1}{5}(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$$
$$=\frac{1}{5}\cdot 10$$
$$=2$$

답 ④

두 복소수 $z_1$, $z_2$에 대하여
$\bar{z_1}+\bar{z_2}=\overline{z_1+z_2}$

**10** $z\bar{z}=a^2+b^2$이므로

$a^2+b^2=5$

$a$, $b$가 자연수이므로

$a^2=1$, $b^2=4$ 또는 $a^2=4$, $b^2=1$

$\therefore a=1$, $b=2$ 또는 $a=2$, $b=1$ ··· ❶

$z\bar{z}+\omega\bar{\omega}+z\bar{\omega}+\bar{z}\omega$

$=z(\bar{z}+\bar{\omega})+\omega(\bar{z}+\bar{\omega})$

$=(z+\omega)(\bar{z}+\bar{\omega})$

$=(z+\omega)(\overline{z+\omega})$

$=\{(a+c)+(b+d)i\}\{(a+c)-(b+d)i\}$

$=(a+c)^2+(b+d)^2$

$z+\omega$
$=(a+bi)+(c+di)$
$=(a+c)+(b+d)i$

이므로 $(a+c)^2+(b+d)^2=25$

$a+c$, $b+d$가 자연수이므로

$(a+c)^2=9$, $(b+d)^2=16$

또는 $(a+c)^2=16$, $(b+d)^2=9$

$\therefore a+c=3$, $b+d=4$ 또는 $a+c=4$, $b+d=3$ ··· ❷

(i) $a=1$, $b=2$이면

$c=2$, $d=2$ 또는 $c=3$, $d=1$

(ii) $a=2$, $b=1$이면

$c=1$, $d=3$ 또는 $c=2$, $d=2$ ··· ❸

이때 $\omega\bar{\omega}=c^2+d^2$이므로 $\omega\bar{\omega}$의 값 중 가장 큰 값은 $c=3$, $d=1$ 또는 $c=1$, $d=3$일 때 10이다. ··· ❹

답 10

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $a$, $b$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |
| ❷ $a+c$, $b+d$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❸ $c$, $d$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |
| ❹ $\omega\bar{\omega}$의 값 중 가장 큰 값을 구할 수 있다. | 20 % |

**11** $\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}=-2$의 양변에 $z\bar{z}$를 곱하면

$z^2+\bar{z}^2=-2z\bar{z}$, $\quad z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2=0$

$(z+\bar{z})^2=0 \quad \therefore z=-\bar{z}$

$z\neq 0$에서 $z$는 순허수이므로 $z=bi\ (b\neq 0)$라 하자.

ㄱ. $z-\bar{z}=bi-(-bi)=2bi$이므로 허수이다.

ㄴ. $\frac{\bar{z}}{z}=\frac{-bi}{bi}=-1$이므로 실수이다.

ㄷ. $(z+\bar{z})(z-\bar{z})=z^2-\bar{z}^2=(bi)^2-(-bi)^2=0$이므로 실수이다.

이상에서 실수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

**12** $z=a+bi$ ($a$, $b$는 실수)라 하면 조건 (가)에서

$(z-\bar{z})i=\{a+bi-(a-bi)\}i=-2b$

즉 $-2b=-2$이므로

$b=1$

조건 (나)에서

$$z+\frac{2}{z}=a+i+\frac{2}{a+i}$$
$$=a+i+\frac{2(a-i)}{(a+i)(a-i)}$$
$$=a+i+\frac{2a-2i}{a^2+1}$$
$$=a+\frac{2a}{a^2+1}+\frac{a^2-1}{a^2+1}i$$

이 복소수가 실수이려면

$a^2-1=0 \quad \therefore a^2=1$

$\therefore (z-i)(\overline{z-i})=(z-i)(\bar{z}-\bar{i})=(z-i)(\bar{z}+i)$

$=z\bar{z}+(z-\bar{z})i+1$

$=(a^2+b^2)-2+1$

$=1$

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)$
$=a^2+b^2$
$=1+1=2$

답 ①

다른 풀이 $a^2=1$에서 $a=\pm1$이므로

$z=1+i$ 또는 $z=-1+i$

(i) $z=1+i$일 때,

$z-i=1$이므로 $\overline{z-i}=1$

$\therefore (z-i)(\overline{z-i})=1$

(ii) $z=-1+i$일 때,

$z-i=-1$이므로 $\overline{z-i}=-1$

$\therefore (z-i)(\overline{z-i})=1$

(i), (ii)에서 구하는 값은 1이다.

**13** $\frac{1}{i}=-i$, $\frac{1}{i^2}=-1$, $\frac{1}{i^3}=i$, $\frac{1}{i^4}=1$, ···이므로

$\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i$

$$\frac{1+i}{i}+\frac{1+2i}{i^2}+\frac{1+3i}{i^3}+\frac{1+4i}{i^4}$$
$=-(1+i)i-(1+2i)+(1+3i)i+(1+4i)$

$=(-i+1)+(-1-2i)+(i-3)+(1+4i)$

$=-2+2i$

마찬가지 방법으로

$$\frac{1+5i}{i^5}+\frac{1+6i}{i^6}+\frac{1+7i}{i^7}+\frac{1+8i}{i^8}$$
$$=\frac{1+5i}{i}+\frac{1+6i}{i^2}+\frac{1+7i}{i^3}+\frac{1+8i}{i^4}$$
$=-(1+5i)i-(1+6i)+(1+7i)i+(1+8i)$

$=(-i+5)+(-1-6i)+(i-7)+(1+8i)$

$=-2+2i$

$\therefore$ (주어진 식)$=2\cdot(-2+2i)=-4+4i$

답 ②

본책 34~35쪽

**14** $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}=i$이므로

$f(k)=i^k$ ⋯ ❶

$\therefore H(n)=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$
$=i+i^2+i^3+\cdots+i^n$

$H(51)=i+i^2+i^3+\cdots+i^{51}$
$=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)$
$+\cdots+i^{44}(i+i^2+i^3+i^4)+i^{48}(i+i^2+i^3)$
$=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)$
$+\cdots+(i-1-i+1)+(i-1-i)$
$=-1$

$H(52)=H(51)+i^{52}=-1+(i^4)^{13}=-1+1=0$

$H(53)=H(52)+i^{53}=0+(i^4)^{13}\cdot i=0+i=i$ ⋯ ❷

$\therefore H(51)+H(52)+H(53)=-1+i$ ⋯ ❸

답 $-1+i$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f(k)=i^k$임을 알 수 있다. | 30% |
| ❷ $H(51)$, $H(52)$, $H(53)$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ❸ $H(51)+H(52)+H(53)$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**1등급 비밀노트**

$i$의 거듭제곱이 포함된 식의 값을 구할 때는 $i$의 거듭제곱의 값이 4개의 수가 반복되고, 그 4개의 수의 합이 0임을 이용한다.

**15** $100i+99i^2+98i^3+97i^4$
$=100i-99-98i+97$
$=-2+2i$

마찬가지 방법으로

$96i^5+95i^6+94i^7+93i^8$
$=92i^9+91i^{10}+90i^{11}+89i^{12}$
$\vdots$
$=4i^{97}+3i^{98}+2i^{99}+i^{100}$
$=-2+2i$

$\therefore 100i+99i^2+98i^3+97i^4+\cdots+2i^{99}+i^{100}$
$=25\cdot(-2+2i)=-50+50i$

답 ②

**16** $m$이 자연수일 때 $(-i)^m$의 값은 $-i$, $-1$, $i$, $1$이 이 순서대로 반복되므로 조건 ㈎에서 $m$은 $m=4k-3$ ($k$는 자연수) 꼴이다.

이때 $m$은 두 자리 자연수이므로

$m=13,\ 17,\ 21,\ \cdots,\ 97$ ⋯ ❶

또 $(2i)^n=2^n\cdot i^n=-2^n$에서 $i^n=-1$

$n$이 자연수일 때 $i^n$의 값은 $i$, $-1$, $-i$, $1$이 이 순서대로 반복되므로 조건 ㈏에서 $n$은 $n=4l-2$ ($l$은 자연수) 꼴이다.

이때 $n$은 두 자리 자연수이므로

$n=10,\ 14,\ 18,\ \cdots,\ 98$ ⋯ ❷

따라서 $m-n$의 값이 가장 클 때는 $m=97$, $n=10$일 때이므로 구하는 값은

$m$의 값은 가장 크고, $n$의 값은 가장 작을 때이다.

$97-10=87$ ⋯ ❸

답 87

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $m$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $n$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ $m-n$의 값 중 가장 큰 값을 구할 수 있다. | 20% |

**17** $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=\left\{\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^n=\left(\dfrac{2i}{2}\right)^n=i^n$,

$\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=\left\{\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^n=\left(\dfrac{-2i}{2}\right)^n=(-i)^n$

이므로

$f(n)=n\{i^n-(-i)^n\}$

$n\{i^n-(-i)^n\}$
$=n\{i^n-(-1)^n\cdot i^n\}$

$=\begin{cases} 0 & (n\text{은 짝수}) \\ 2n\cdot i^n & (n\text{은 홀수}) \end{cases}$ ⋯ ❶

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(40)$
$=f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+\cdots+f(37)+f(39)$
$=2i+6i^3+10i^5+14i^7+\cdots+74i^{37}+78i^{39}$
$=(2i-6i)+(10i-14i)+\cdots+(74i-78i)$
$=10\cdot(-4i)=-40i$ ⋯ ❷

답 $-40i$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f(n)$을 간단히 할 수 있다. | 50% |
| ❷ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(40)$의 값을 구할 수 있다. | 50% |

**18** $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에 대하여

$z^2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$,

$z^3=z^2\cdot z=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\cdot\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=1$

$\vdots$

이므로

$z^{99}=(z^3)^{33}=1$, $z^{100}=(z^3)^{33}\cdot z=z$,

$z^{198}=(z^3)^{66}=1$, $z^{200}=(z^3)^{66}\cdot z^2=z^2$

$\therefore P_{99}+P_{100}=\left|\dfrac{z^{99}+1}{z^{198}}\right|+\left|\dfrac{z^{100}+1}{z^{200}}\right|$

$=\left|\dfrac{1+1}{1}\right|+\left|\dfrac{z+1}{z^2}\right|$

$=2+\left|\dfrac{\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}+1}{\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}}\right|$

$=2+\left|\dfrac{\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}}{\dfrac{-(1+\sqrt{3}i)}{2}}\right|$

$=2+1=3$

답 3

일품 BOX

**19** $z=\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}=i$이므로

$$\begin{aligned}z^n+z^{2n}+z^{3n}&=i^n+i^{2n}+i^{3n}\\&=i^n+(i^2)^n+(i^3)^n\\&=i^n+(-1)^n+(-i)^n\end{aligned}$$

자연수 $k$에 대하여

(i) $n=4k-3$일 때,

$i^n+(-1)^n+(-i)^n=i-1-i=-1$

(ii) $n=4k-2$일 때,

$i^n+(-1)^n+(-i)^n=-1+1-1=-1$

(iii) $n=4k-1$일 때,

$i^n+(-1)^n+(-i)^n=-i-1+i=-1$

(iv) $n=4k$일 때,

$i^n+(-1)^n+(-i)^n=1+1+1=3$

이상에서 $z^n+z^{2n}+z^{3n}=-1$을 성립하도록 하는 $n$은 4의 배수를 제외한 수이므로 100 이하의 자연수 $n$의 개수는

$100-25=75$ 답 75

100 이하의 4의 배수의 개수는 25이다.

**20** 조건 (가)에서

$a-1<0,\ b-1>0$

$\therefore a<1,\ b>1$

조건 (나)에서 $a+b=0,\ b-c-2=0$

$\therefore a=-b,\ c=b-2$

이때 $b>1$에서 $-b<-1,\ b-2>-1$이므로

$a<-1,\ c>-1$

따라서 $a<-1<c<b$이므로

$a<c<b$ 답 $a<c<b$

실수 $a$, $b$에 대하여
$|a|\ge0$, $|b|\ge0$이므로
$|a|+|b|=0$이면
$|a|=0$, $|b|=0$
$\therefore a=0,\ b=0$

$b-2<b$

**21** $\dfrac{a}{1+i}+\dfrac{b}{1-i}=\dfrac{a(1-i)+b(1+i)}{(1+i)(1-i)}$

$=\dfrac{(a+b)+(-a+b)i}{2}$ ⋯❶

이므로 주어진 등식은

$(a+b)+(-a+b)i=-12+4i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=-12,\ -a+b=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-8,\ b=-4$ ⋯❷

$\therefore \sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{-8}\sqrt{-4}=-\sqrt{(-8)\cdot(-4)}$

$=-4\sqrt{2}$ ⋯❸

답 $-4\sqrt{2}$

$a<0,\ b<0$이면
$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\dfrac{a}{1+i}+\dfrac{b}{1-i}$를 간단히 할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $a$, $b$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❸ $\sqrt{a}\sqrt{b}$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |

$a>0$, $b<0$일 때,
$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$
그 외의 경우에는
$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\ (b\ne0)$

**22** ㄱ. $a<0$이므로 $\sqrt{a^2}=-a$

$b>0$이므로 $\sqrt{b^2}=b$

$\therefore \sqrt{a^2}\sqrt{b^2}=-ab$

ㄴ. 모든 실수 $x$에 대하여 $(\sqrt{x})^2=x$이므로

$(\sqrt{ab})^2=ab$

ㄷ. $a<0,\ b>0$이므로

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

**23** $-1<a<1$이므로

$a+1>0,\ a-1<0,\ 1-a>0,\ -a-1<0$

$\therefore$ (주어진 식)$=\sqrt{a+1}\sqrt{1-a}i\cdot\sqrt{1-a}\sqrt{a+1}i$

$=(\sqrt{a+1})^2(\sqrt{1-a})^2\cdot i^2$

$=(a+1)(1-a)\cdot(-1)$

$=a^2-1$ 답 ②

## 사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 36쪽

**01** ㄱ. $\alpha=a+bi$ ($a$, $b$는 실수)라 하면

$\alpha\bar{\alpha}=(a+bi)(a-bi)$

$=a^2+b^2\ge0$

마찬가지 방법으로 $\beta\bar{\beta}\ge0$이므로

$P=\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}\ge0$

ㄴ. $\alpha=1,\ \beta=-1$이면 $\bar{\alpha}=1,\ \bar{\beta}=-1$이므로

$Q=\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta$

$=1\cdot(-1)+1\cdot(-1)$

$=-2<0$

ㄷ. $P-Q=\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}-(\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta)$

$=\alpha(\bar{\alpha}-\bar{\beta})-\beta(\bar{\alpha}-\bar{\beta})$

$=(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})$

$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})\ge0$

$\therefore P\ge Q$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

**1등급 비밀노트**

복소수 $z=a+bi$ ($a$, $b$는 실수)에 대하여 켤레복소수 $\bar{z}$는 $\bar{z}=a-bi$이므로

① $z+\bar{z}=2a$ (실수) ② $z\bar{z}=a^2+b^2$ (실수) ③ $z\bar{z}\ge0$

**02** $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$

$=\left(i+\dfrac{1}{i}\right)+\left(i^2+\dfrac{2}{i^2}\right)+\left(i^3+\dfrac{3}{i^3}\right)+\cdots+\left(i^{100}+\dfrac{100}{i^{100}}\right)$

$=(i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{100})$

$+\left(\dfrac{1}{i}+\dfrac{2}{i^2}+\dfrac{3}{i^3}+\dfrac{4}{i^4}+\cdots+\dfrac{100}{i^{100}}\right)$

이때

$$\begin{aligned}&i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{100}\\&=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)\\&\quad+\cdots+i^{96}(i+i^2+i^3+i^4)\\&=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)\\&=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{i}+\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}+\frac{4}{i^4}+\cdots+\frac{100}{i^{100}}\\&=\left(\frac{1}{i}+\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}+\frac{4}{i^4}\right)+\left(\frac{5}{i^5}+\frac{6}{i^6}+\frac{7}{i^7}+\frac{8}{i^8}\right)\\&\quad+\cdots+\left(\frac{97}{i^{97}}+\frac{98}{i^{98}}+\frac{99}{i^{99}}+\frac{100}{i^{100}}\right)\\&=\left(\frac{1}{i}-2-\frac{3}{i}+4\right)+\left(\frac{5}{i}-6-\frac{7}{i}+8\right)\\&\quad+\cdots+\left(\frac{97}{i}-98-\frac{99}{i}+100\right)\\&=\left(2-\frac{2}{i}\right)+\left(2-\frac{2}{i}\right)+\cdots+\left(2-\frac{2}{i}\right)\\&=25\left(2-\frac{2}{i}\right)=50-\frac{50}{i}\\&=50+50i\end{aligned}$$

이므로

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)=50+50i$$

따라서 $x=50$, $y=50$이므로 $\quad x+y=100$ 답 ④

**03** ㄱ. $f(n)+g(n)=z^n+\overline{z}^n$이므로

$$\begin{aligned}\overline{f(n)+g(n)}&=\overline{z^n+\overline{z}^n}=\overline{z}^n+(\overline{\overline{z}^n})\\&=\overline{z}^n+z^n\\&=g(n)+f(n)\end{aligned}$$

ㄴ. $f(2)=(1+i)^2=2i$,

$f(6)=(1+i)^6=\{(1+i)^2\}^3=(2i)^3=-8i$,

$f(10)=(1+i)^{10}=\{(1+i)^2\}^5=(2i)^5=32i$,

⋮

$g(2)=(1-i)^2=-2i$,

$g(6)=(1-i)^6=\{(1-i)^2\}^3=(-2i)^3=8i$,

$g(10)=(1-i)^{10}=\{(1-i)^2\}^5=(-2i)^5=-32i$,

⋮

$$\begin{aligned}\therefore f(2)+g(2)&=f(6)+g(6)\\&=f(10)+g(10)=\cdots=0\end{aligned}$$

따라서 $n=4k-2$ ($k$는 자연수)일 때,

$$f(n)+g(n)=0$$

ㄷ. $f(4)=(1+i)^4=\{(1+i)^2\}^2=(2i)^2=-4$,

$f(8)=(1+i)^8=\{(1+i)^4\}^2=(-4)^2=16$,

$f(12)=(1+i)^{12}=\{(1+i)^4\}^3=(-4)^3=-64$,

⋮

$g(4)=(1-i)^4=\{(1-i)^2\}^2=(-2i)^2=-4$,

$g(8)=(1-i)^8=\{(1-i)^4\}^2=(-4)^2=16$,

$g(12)=(1-i)^{12}=\{(1-i)^4\}^3=(-4)^3=-64$,

⋮

$\therefore f(4)=g(4)$, $f(8)=g(8)$,

$f(12)=g(12)$, ⋯

따라서 $n=4k$ ($k$는 자연수)일 때,

$$f(n)=g(n)$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

**1등급 비밀노트**

**$1\pm i$의 곱셈**

① $(1+i)^2=2i$ ② $(1-i)^2=-2i$

③ $(1+i)(1-i)=2$ ④ $(1+i)^4=(1-i)^4=-4$

**04** $z^2=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{-2i}{2}=-i$,

$z^3=z^2\cdot z=-i\cdot\frac{1-i}{\sqrt{2}}=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$,

$z^4=(z^2)^2=(-i)^2=-1$,

$z^5=z^4\cdot z=-1\cdot\frac{1-i}{\sqrt{2}}=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$,

$z^6=z^4\cdot z^2=-1\cdot(-i)=i$,

$z^7=z^4\cdot z^3=-1\cdot\frac{-1-i}{\sqrt{2}}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$,

$z^8=(z^4)^2=(-1)^2=1$,

⋮

이므로

$$z^{77}=(z^8)^9\cdot z^5=z^5,\ z^{66}=(z^8)^8\cdot z^2=z^2$$

따라서 $z^{77}\cdot z^k=z^{66}$에서

$$z^5\cdot z^k=z^2$$

이때 $z^2=z^{10}=z^{18}=z^{26}=\cdots$이므로 100 이하의 자연수 $k$는 5, 13, 21, ⋯, 93의 12개이다. 답 12

$z^5\cdot z^k=z^{10}$일 때, $k=5$
$z^5\cdot z^k=z^{18}$일 때, $k=13$
⋮
$z^5\cdot z^k=z^{98}$일 때, $k=93$

**05** $(1+i)^2=2i$, $(1+i)^4=\{(1+i)^2\}^2=(2i)^2=-4$ 이므로 자연수 $k$에 대하여

$$(1+i)^{4k}=\{(1+i)^4\}^k=(-4)^k$$

이때 모든 자연수 $n$에 대하여 $-4^n<0$이므로 $(1+i)^m=-4^n$이 성립하려면 $\frac{m}{4}=n$, 즉 $m=4n$이고, $n$은 홀수이어야 한다.

따라서 $m+n$의 값 중 가장 큰 값은 $m=92$, $n=23$일 때 115이다. 답 115

$m=4k$ ($k$는 자연수)라 하면

$(1+i)^m=(1+i)^{4k}=(-4)^k$

이므로 $(-4)^k=-4^n$

$\therefore (-4)^{\frac{m}{4}}=-4^n$

**06** 자연수 $m$, $n$에 대하여 조건 (가)에서 $m<n$이므로 $n\geq 2$이고, $n=2k+1$ ($k$는 자연수) 꼴이면

$$\begin{aligned}(1+i)^n&=(1+i)^{2k+1}\\&=\{(1+i)^2\}^k\cdot(1+i)\\&=(2i)^k\cdot(1+i)\end{aligned}$$

이므로 조건 (나)에서 $(2i)^m\cdot(1+i)^n$이 실수가 되도록 하는 자연수 $m$이 존재하지 않는다.

즉 $n=2k$ 꼴이다.

따라서

$$\begin{aligned}&(-2)^l\cdot(2i)^m\cdot(1+i)^n\\&=(-2)^l\cdot(2i)^m\cdot(1+i)^{2k}\\&=(-2)^l\cdot(2i)^m\cdot(2i)^k\\&=(-2)^l\cdot(2i)^{m+k}\\&=(-1)^l\cdot2^{l+m+k}\cdot i^{m+k}\end{aligned}$$

이므로 $(-2)^l\cdot(2i)^m\cdot(1+i)^n=32$가 성립하려면

$l+m+k=5$ …… ㉠

$(-1)^l\cdot i^{m+k}=1$ …… ㉡

자연수 $l$, $m$, $k$에 대하여

(i) $l=1$일 때, ㉠에서 $m+k=4$이므로

$(-1)^1\cdot i^4=-1$

따라서 ㉡을 만족시키지 않는다.

(ii) $l=2$일 때, ㉠에서 $m+k=3$이므로

$(-1)^2\cdot i^3=-i$

따라서 ㉡을 만족시키지 않는다.

(iii) $l=3$일 때, ㉠에서 $m+k=2$이므로

$(-1)^3\cdot i^2=1$

따라서 ㉡을 만족시킨다.

이때 $m+k=2$에서 $m=1$, $k=1$이므로

$l=3$, $m=1$, $n=2k=2$

한편 $l\ge4$이면 ㉠을 만족시키는 자연수 $m$, $k$는 존재하지 않는다.

이상에서 $l=3$, $m=1$, $n=2$이므로

$lmn=6$ 답 6

**07** $ab\neq0$이고 $\sqrt{ab}=-\sqrt{a}\sqrt{b}$이므로

$a<0$, $b<0$

$\therefore$ (주어진 식)

$$\begin{aligned}&=\sqrt{a}\sqrt{-a}-\sqrt{a}\sqrt{b}-\sqrt{b}\sqrt{-a}+\sqrt{b}\sqrt{b}+\sqrt{a}\sqrt{-a}\\&\quad-\sqrt{a}\sqrt{-b}-\sqrt{-b}\sqrt{-a}+\sqrt{-b}\sqrt{-b}\\&=\sqrt{-a^2}+\sqrt{ab}-\sqrt{-ab}-\sqrt{b^2}+\sqrt{-a^2}\\&\quad-\sqrt{-ab}-\sqrt{ab}+\sqrt{b^2}\\&=2\sqrt{-a^2}-2\sqrt{-ab}\\&=2\sqrt{a^2}i-2\sqrt{ab}i\\&=2|a|i-2\sqrt{ab}i\\&=-2ai-2\sqrt{ab}i\\&=-2(a+\sqrt{ab})i\end{aligned}$$

답 ①

# 04 이차방정식

## 개념&핵심 기출

본책 38~40쪽

**01** 이차방정식 $x^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})x-\sqrt{6}=0$에서

$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=0$

$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

$\alpha<\beta$이므로 $\alpha=-\sqrt{2}$, $\beta=\sqrt{3}$

이차방정식 $(\sqrt{2}+1)x^2-x-(2+\sqrt{2})=0$의 양변에 $\sqrt{2}-1$을 곱하면

> $x^2$의 계수가 무리수인 이차방정식은 $x^2$의 계수를 유리화한 후 풀면 계산이 간단해진다.

$x^2-(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}=0$

$(x+1)(x-\sqrt{2})=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\sqrt{2}$

$\gamma<\delta$이므로 $\gamma=-1$, $\delta=\sqrt{2}$

$\therefore \alpha<\gamma<\delta<\beta$ 답 ③

**02** 주어진 방정식의 실근을 $\alpha$라 하면

$\alpha^2+4\alpha i-\alpha^2+3a-8i=0$

$(\alpha^2-a^2+3a)+(4\alpha-8)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

> 두 복소수 $a+bi$, $c+di$가 서로 같을 조건
> ➡ $a=c$, $b=d$
> (단, $a$, $b$, $c$, $d$는 실수)

$\alpha^2-a^2+3a=0$ …… ㉠

$4\alpha-8=0$ …… ㉡

㉡에서 $\alpha=2$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$a^2-3a-4=0$, $(a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=4$ 답 $-1$, $4$

**03** 방정식 $|x^2+(a^2-1)x+2a-5|=3$의 한 근이 1이므로 이 방정식에 $x=1$을 대입하여 정리하면

$|a^2+2a-5|=3$

$\therefore a^2+2a-5=3$ 또는 $a^2+2a-5=-3$

(i) $a^2+2a-5=3$일 때,

$a^2+2a-8=0$, $(a+4)(a-2)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=2$

그런데 $a>0$이므로

$a=2$

(ii) $a^2+2a-5=-3$일 때,

$a^2+2a-2=0$ $\therefore a=-1\pm\sqrt{3}$

그런데 $a>0$이므로

$a=-1+\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 모든 양수 $a$의 값의 합은

$2+(-1+\sqrt{3})=1+\sqrt{3}$ 답 ③

**04** 주어진 이차방정식이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(\sqrt{k})^2-\{(a^2-3)k+(b^2-3b+2)\}=0$

$(4-a^2)k-(b^2-3b+2)=0$

$(2+a)(2-a)k-(b-1)(b-2)=0$

앞의 식이 모든 양수 $k$에 대하여 성립하므로

$(2+a)(2-a)=0$에서

$a=-2$ 또는 $a=2$

$(b-1)(b-2)=0$에서

$b=1$ 또는 $b=2$

따라서 $a+b$의 값 중 가장 큰 값은 $a=2$, $b=2$일 때

$2+2=4$이다. 답 4

**05** 삼각형 ABC는 둔각삼각형이므로

$b^2+c^2<a^2$ ($\because$ $a>b>c$) …… ㉠

이때 이차방정식 $(a+b)x^2+2cx+a-b=0$의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=c^2-(a+b)(a-b)$$
$$=c^2-(a^2-b^2)$$
$$=c^2-a^2+b^2<0 \ (\because ㉠)$$

따라서 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다. 답 서로 다른 두 허근

참고 $\triangle$ABC에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라 할 때

$$\begin{cases} \angle C<90^\circ \text{이면} & a^2+b^2>c^2 \\ \angle C=90^\circ \text{이면} & a^2+b^2=c^2 \\ \angle C>90^\circ \text{이면} & a^2+b^2<c^2 \end{cases}$$

**06** $ab\neq0$이고 $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$이므로

$a<0$, $b>0$

ㄱ. $a=-1$, $b=1$일 때, $x^2-x+1=0$의 판별식을 $D_1$이라 하면

$D_1=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ㄴ. $x^2+bx+a=0$의 판별식을 $D_2$라 하면

$D_2=b^2-4a>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. $ax^2+ax+b=0$의 판별식을 $D_3$이라 하면

$D_3=a^2-4ab>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이상에서 항상 서로 다른 두 실근을 갖는 이차방정식은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

**07** 이차방정식 $x^2-6x+4=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=4$

이때 $\alpha>0$, $\beta>0$이므로

$$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$$
$$=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$$
$$=6+2\sqrt{4}=10$$

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{10}$ ($\because$ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}>0$) 답 ⑤

이차방정식의 두 근의 차가 $k$이면 두 근을 $\alpha$, $\alpha+k$로 놓는다.

이차방정식의 두 근의 비가 $m:n$이면 두 근을 $m\alpha$, $n\alpha$ ($\alpha\neq0$)로 놓는다.

$a<0$, $b>0$이므로
$b^2>0$, $-4a>0$
$\therefore b^2-4a>0$

$a<0$, $b>0$이므로
$a^2>0$, $-4ab>0$
$\therefore a^2-4ab>0$

$\alpha\beta>0$이므로
$\alpha>0$, $\beta>0$ 또는
$\alpha<0$, $\beta<0$
이때 $\alpha+\beta>0$이므로
$\alpha>0$, $\beta>0$

**08** 주어진 이차방정식의 두 근의 차가 2이므로 두 근을 $\alpha$, $\alpha+2$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+2)=m$ $\quad\therefore m=2\alpha+2$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+2)=3m-1$ …… ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$\alpha(\alpha+2)=3(2\alpha+2)-1$

$\alpha^2-4\alpha-5=0$

$(\alpha+1)(\alpha-5)=0$

$\therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=5$

(ⅰ) $\alpha=-1$일 때, $\quad m=0$

(ⅱ) $\alpha=5$일 때, $\quad m=12$

(ⅰ), (ⅱ)에서 양수 $m$의 값은 12이다. 답 12

다른 풀이 이차방정식 $x^2-mx+3m-1=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면

$|\alpha-\beta|=2$ …… ㉠

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=3m-1$ …… ㉡

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로 ㉠, ㉡에서

$4=m^2-4(3m-1)$, $\quad m^2-12m=0$

$m(m-12)=0$

$\therefore m=12$ ($\because$ $m>0$)

**09** 주어진 이차방정식의 두 근의 비가 $1:2$이므로 두 근을 $\alpha$, $2\alpha$ ($\alpha\neq0$)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha=-3(k-1)$

$\therefore \alpha=-k+1$ …… ㉠

$\alpha\cdot2\alpha=k$ $\quad\therefore 2\alpha^2=k$ …… ㉡

㉠에 ㉡을 대입하여 정리하면

$2\alpha^2+\alpha-1=0$

$(\alpha+1)(2\alpha-1)=0$

$\therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=\dfrac{1}{2}$

(ⅰ) $\alpha=-1$일 때, $\quad k=2$

(ⅱ) $\alpha=\dfrac{1}{2}$일 때, $\quad k=\dfrac{1}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 실수 $k$의 값의 합은

$2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$ 답 ⑤

**10** 근과 계수의 관계에 의하여

$(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})=-a$ $\quad\therefore a=-6$

$(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=b$ $\quad\therefore b=7$

따라서 $a+b=1$, $a-b=-13$이므로 $1$, $-13$을 두 근으로 하고 $x^2$의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-1)(x+13)=0$

$\therefore x^2+12x-13=0$ 답 $x^2+12x-13=0$

Ⅱ 방정식

**11** 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 1이므로

$1+a+b=0$

$\therefore a+b=-1$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+2ax-b+1=0$의 한 근이 $-1$이므로

$1-2a-b+1=0$

$\therefore 2a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-4$

$\therefore a^2=9,\ \dfrac{b}{2}=-2$

따라서 9, $-2$를 두 근으로 하고 $x^2$의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-9)(x+2)=0$

즉 $f(x)=(x-9)(x+2)$이므로

$f(-3)=(-12)\cdot(-1)=12$

답 ③

**12** 근의 공식을 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{a}$로 잘못 적용하여 풀었으므로

2로 나눈 식이 근의 공식을 바르게 적용한 식이다.

$\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{a}=4,\ \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{a}=-2$

이때 바르게 푼 근은

$\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=2,\ \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-1$

이므로 2, $-1$을 두 근으로 하고 $x^2$의 계수가 $a$인 이차방정식은

$a(x-2)(x+1)=0$

$\therefore ax^2-ax-2a=0$

이 이차방정식이 $ax^2+bx+c=0$과 같으므로

$b=-a,\ c=-2a$

$\therefore \dfrac{b+c}{a}=\dfrac{-a-2a}{a}$

$=-3\ (\because a\neq 0)$

답 $-3$

**13** 이차방정식 $x^2+2x+4=0$의 두 근은

$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot 4}$

$=-1\pm\sqrt{3}i$

이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 근은 $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$이다.

따라서 $x^2+2x+4$를 복소수의 범위에서 인수분해하면

$\{x-(-1-\sqrt{3}i)\}\{x-(-1+\sqrt{3}i)\}$

$=(x+1+\sqrt{3}i)(x+1-\sqrt{3}i)$

답 ⑤

다른 풀이 $x^2+2x+4=(x^2+2x+1)-(-3)$

$=(x+1)^2-(\sqrt{3}i)^2$

$=(x+1+\sqrt{3}i)(x+1-\sqrt{3}i)$

**14** 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $2+i,\ 2-i$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+i)+(2-i)=-a \quad \therefore a=-4$

$(2+i)(2-i)=b \quad \therefore b=5$

따라서 이차방정식 $5x^2+4x+1=0$의 두 근은

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-5\cdot 1}}{5}=\dfrac{-2\pm i}{5}$

이므로 $5x^2+4x+1$을 복소수의 범위에서 인수분해하면

$5\left(x-\dfrac{-2+i}{5}\right)\left(x-\dfrac{-2-i}{5}\right)$

$=5\left(x+\dfrac{2-i}{5}\right)\left(x+\dfrac{2+i}{5}\right)$

답 $5\left(x+\dfrac{2-i}{5}\right)\left(x+\dfrac{2+i}{5}\right)$

**15** $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$이고, 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근은

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

따라서 $x^3-1$을 복소수의 범위에서 인수분해하면

$(x-1)\left(x-\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)$

$=(x-1)\left(x+\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$

답 $(x-1)\left(x+\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$

**16** 이차방정식 $x^2-(p+q)x+p-q=0$의 한 근이 $4-\sqrt{10}$이고, $p$, $q$가 유리수이므로 다른 한 근은 $4+\sqrt{10}$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$(4-\sqrt{10})+(4+\sqrt{10})=p+q$

$(4-\sqrt{10})(4+\sqrt{10})=p-q$

$\therefore p+q=8,\ p-q=6$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$p=7,\ q=1$

$\therefore pq=7$

답 ②

**17** $\dfrac{2+i}{1+i}=\dfrac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{3-i}{2}$에서 이차방정식 $2x^2+2ax+b=0$의 한 근이 $\dfrac{3-i}{2}$이고, $a$, $b$가 실수이므로 다른 한 근은 $\dfrac{3+i}{2}$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{3-i}{2}+\dfrac{3+i}{2}=-a \quad \therefore a=-3$

$\dfrac{3-i}{2}\cdot\dfrac{3+i}{2}=\dfrac{b}{2} \quad \therefore b=5$

따라서 이차방정식 $x^2+cx+d=0$의 한 근이 $-3+\sqrt{5}$이고, $c$, $d$가 유리수이므로 다른 한 근은 $-3-\sqrt{5}$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$(-3+\sqrt{5})+(-3-\sqrt{5})=-c \quad \therefore c=6$

$(-3+\sqrt{5})(-3-\sqrt{5})=d \quad \therefore d=4$

$\therefore d-c=-2$

답 $-2$

**18** 이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 한 근이 $-1+\sqrt{2}i$이고, $m$, $n$이 실수이므로 다른 한 근은 $-1-\sqrt{2}i$이다.
근과 계수의 관계에 의하여

$(-1+\sqrt{2}i)+(-1-\sqrt{2}i)=-m \quad \therefore m=2$

$(-1+\sqrt{2}i)(-1-\sqrt{2}i)=n \quad \therefore n=3$

따라서 이차방정식 $x^2+2nx-m=0$은 $x^2+6x-2=0$이므로 이 이차방정식의 양의 근은

$x=-3+\sqrt{3^2-1\cdot(-2)}$
$=-3+\sqrt{11}$

즉 $a=-3$, $b=11$이므로

$a+b=8$

답 ②

## 1등급을 위한 고난도 문제

본책 41~43쪽

**01** $(x-2)*(x+4)$
$=(x-2)(x+4)-(x-2)-(x+4)$
$=x^2+2x-8-x+2-x-4$
$=x^2-10$,
$x*3=3x-x-3=2x-3$
따라서 주어진 방정식은
$x^2-10+|2x-3|-2=0$
$\therefore x^2+|2x-3|-12=0$ ····· ❶

(i) $2x-3<0$, 즉 $x<\frac{3}{2}$일 때,
$x^2-(2x-3)-12=0, \quad x^2-2x-9=0$
$\therefore x=1\pm\sqrt{10}$
그런데 $x<\frac{3}{2}$이므로
$x=1-\sqrt{10}$ ····· ❷

(ii) $2x-3\ge 0$, 즉 $x\ge\frac{3}{2}$일 때,
$x^2+(2x-3)-12=0, \quad x^2+2x-15=0$
$(x+5)(x-3)=0$
$\therefore x=-5$ 또는 $x=3$
그런데 $x\ge\frac{3}{2}$이므로
$x=3$ ····· ❸

(i), (ii)에서
$x=1-\sqrt{10}$ 또는 $x=3$ ····· ❹

답 $x=1-\sqrt{10}$ 또는 $x=3$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 주어진 방정식을 간단히 할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $x<\frac{3}{2}$일 때, $x$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❸ $x\ge\frac{3}{2}$일 때, $x$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❹ 방정식의 해를 구할 수 있다. | 10 % |

$|A|=\begin{cases} A\ (A\ge 0) \\ -A\ (A<0)\end{cases}$

**02** 이차방정식 $3x^2-(2k+5)x+3=0$의 한 근이 $\alpha$이므로
$3\alpha^2-(2k+5)\alpha+3=0$
$\alpha\neq 0$이므로 양변을 $\alpha$로 나누면

$3\alpha^2-(2k+5)\alpha+3=0$에 $\alpha=0$을 대입하면 등식이 성립하지 않으므로 $\alpha\neq 0$

$3\alpha-(2k+5)+\frac{3}{\alpha}=0$
$3\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)-(2k+5)=0$
이때 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=k^2$이므로
$3k^2-2k-5=0$
$(k+1)(3k-5)=0$
$\therefore k=-1$ 또는 $k=\frac{5}{3}$
그런데 $k>0$이므로
$k=\frac{5}{3}$

답 ③

**1등급 비밀노트**

$x^2$의 계수와 상수항이 같은 이차방정식에서 $\alpha$가 한 근이면 $\frac{1}{\alpha}$도 근이다. 이 성질을 이용하면 $3x^2-(2k+5)x+3=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=\frac{2k+5}{3}$이므로 $\frac{2k+5}{3}=k^2$을 만족시키는 양수 $k$를 구해도 된다.

**03** $kx^2+(1-2k)x-2=0$에서
$(kx+1)(x-2)=0$
$\therefore x=-\frac{1}{k}$ 또는 $x=2$
$x^2-2(k+1)x+4k=0$에서
$(x-2k)(x-2)=0$
$\therefore x=2k$ 또는 $x=2$
따라서 $\alpha=-\frac{1}{k}$, $\beta=2$, $\gamma=2k$이므로
$\beta-\alpha=\gamma-\beta$에서
$2+\frac{1}{k}=2k-2$
$2k^2-4k-1=0$
$\therefore k=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$

답 $\frac{2+\sqrt{6}}{2}$, $\frac{2-\sqrt{6}}{2}$

**04** $|x-3|^2+3|x-3|-10=0$에서
$|x-3|=t\ (t\ge 0)$로 놓으면

$|x-3|\ge 0$이므로 $t\ge 0$

$t^2+3t-10=0$
$(t+5)(t-2)=0$
$\therefore t=2\ (\because t\ge 0)$
즉 $|x-3|=2$이므로
$x-3=\pm 2$
$\therefore x=1$ 또는 $x=5$
$\therefore |\alpha-\beta|=4$

답 ④

일품 BOX

**05** (i) $-1<x<0$일 때, $0<x^2<1$이므로

$[x^2]=0,\ [x]=-1$

따라서 주어진 방정식은 $x^2=2x+1$이므로

$x^2-2x-1=0$

$\therefore x=1\pm\sqrt{2}$

그런데 $-1<x<0$이므로

$x=1-\sqrt{2}$ ····· ❶

(ii) $0\le x<1$일 때, $0\le x^2<1$이므로

$[x^2]=0,\ [x]=0$

따라서 주어진 방정식은 $0=2x+1$이므로

$x=-\dfrac{1}{2}$

그런데 $0\le x<1$이므로 해는 없다. ····· ❷

(i), (ii)에서 구하는 해는

$x=1-\sqrt{2}$ ····· ❸

답 $x=1-\sqrt{2}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $-1<x<0$일 때, 해를 구할 수 있다. | 40 % |
| ❷ $0\le x<1$일 때, 해를 구할 수 있다. | 40 % |
| ❸ 방정식의 해를 구할 수 있다. | 20 % |

**06** $\overline{AB}:\overline{BC}=1:r$이므로

$\overline{AB}=k,\ \overline{BC}=rk\ (k>0)$

라 하면 □ABEF는 한 변의 길이가 $k$인 정사각형이므로

$\overline{EC}=(r-1)k$

$\overline{EC}=\overline{BC}-\overline{BE}$
$=rk-k$
$=(r-1)k$

□ABCD와 □ECDF는 닮음이므로

$1:r=(r-1)k:k$

$r(r-1)k=k,\quad r^2-r-1=0\ (\because k>0)$

$\therefore r=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

그런데 $r>1$이므로 $\quad r=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 답 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

참고 주어진 문제와 같이 직사각형에서 정사각형을 잘라내고 남은 직사각형이 원래의 직사각형과 닮음일 때, 두 변 AB, BC의 길이의 비를 황금비라 한다. 즉 황금비는 $1:\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$이다. 이때 이러한 직사각형 ABCD를 황금사각형이라 한다.

**07** 이차방정식 $x^2-2(a-k)x-a+15=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\dfrac{D}{4}=\{-(a-k)\}^2-(-a+15)\ge 0$

$\therefore (a-k)^2+a-15\ge 0$ ······ ㉠

이때 $a,\ k$는 실수이므로 $\quad (a-k)^2\ge 0$

따라서 ㉠이 모든 실수 $k$에 대하여 성립하려면 $a-15\ge 0$, 즉 $a\ge 15$이어야 하므로 가장 작은 실수 $a$의 값은 15이다. 답 15

**08** 이차방정식 $x^2-ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$D=(-a)^2-4b>0$

$\therefore a^2>4b$

(i) $a=1$ 또는 $a=2$일 때, $b$의 값은 존재하지 않는다. ($1>4b$ 또는 $4>4b$)

(ii) $a=3$일 때, $\quad b=1,\ 2$ ($9>4b$)

(iii) $a=4$일 때, $\quad b=1,\ 2,\ 3$ ($16>4b$)

(iv) $a=5$ 또는 $a=6$일 때, $\quad b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ ($25>4b$ 또는 $36>4b$)

이상에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$2+3+6+6=17$ 답 ⑤

**09** $x^2+3xy+2y^2-x-3y+k-1$을 $x$에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+(3y-1)x+2y^2-3y+k-1$

$x^2+(3y-1)x+2y^2-3y+k-1=0$을 $x$에 대한 이차방정식으로 생각하면 근의 공식에 의하여

$x=\dfrac{-(3y-1)\pm\sqrt{D}}{2}$

(단, $D=(3y-1)^2-4(2y^2-3y+k-1)$)

그런데 주어진 식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 $D$가 완전제곱식이 되어야 하므로

$D=(3y-1)^2-4(2y^2-3y+k-1)$
$=y^2+6y-4k+5$

에서 $y$에 대한 이차방정식 $D=0$의 판별식이 0이어야 한다.

따라서 $D=0$의 판별식을 $D'$이라 하면

$\dfrac{D'}{4}=3^2-(-4k+5)=0$

$9+4k-5=0$

$\therefore k=-1$ 답 $-1$

**1등급 비밀노트**

$x,\ y$에 대한 이차식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되기 위해서는 $x$ 또는 $y$에 대한 이차식으로 정리했을 때, (이차식)$=0$의 근이 일차식이 되어야 하므로 (이차식)$=0$의 판별식 $D$가 완전제곱식이 되어야 한다. 따라서 $D=0$의 판별식 $D'$이 0이어야 한다.

**10** 주어진 이차방정식의 좌변을 전개하여 정리하면

$3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$ ····· ❶

이 이차방정식이 오직 하나의 실근, 즉 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\dfrac{D}{4}=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=0$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$\therefore a=b=c$ ····· ❷

$a,\ b,\ c$는 실수이므로
$(a-b)^2=(b-c)^2$
$=(c-a)^2$
$=0$
$a-b=b-c=c-a$
$=0$
$\therefore a=b=c$

따라서 삼각형 ABC는 정삼각형이다. ····· ❸

답 정삼각형

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 주어진 방정식의 좌변을 전개할 수 있다. | 20 % |
| ❷ $a$, $b$, $c$ 사이의 관계식을 구할 수 있다. | 60 % |
| ❸ 삼각형 ABC가 어떤 삼각형인지 말할 수 있다. | 20 % |

**11** 근과 계수의 관계에 의하여 주어진 이차방정식의 두 근의 곱이 양수이므로 두 근의 부호는 서로 같다.
따라서 주어진 이차방정식의 두 근을 $4\alpha$, $\alpha$ $(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$4\alpha+\alpha=-(2k-1)$ …… ㉠

$4\alpha\cdot\alpha=36$ …… ㉡ ··· ❶

㉡에서 $\alpha^2=9$이므로

$\alpha=-3$ 또는 $\alpha=3$ ··· ❷

(i) $\alpha=-3$일 때, ㉠에서 $k=8$

(ii) $\alpha=3$일 때, ㉠에서 $k=-7$ ··· ❸

(i), (ii)에서 모든 실수 $k$의 값의 곱은

$8\cdot(-7)=-56$ ··· ❹

답 $-56$

㉠에 $\alpha=-3$을 대입하면
$-15=-2k+1$
$\therefore k=8$

㉠에 $\alpha=3$을 대입하면
$15=-2k+1$
$\therefore k=-7$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 식을 세울 수 있다. | 30 % |
| ❷ $\alpha$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |
| ❸ $k$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❹ 모든 실수 $k$의 값의 곱을 구할 수 있다. | 20 % |

**12** 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$ …… ㉠

$\alpha\beta=a$ …… ㉡

이때 $|\alpha|+|\beta|=9$이므로 $\alpha<\beta$라 하면

$\alpha<0$, $\beta>0$

$\therefore -\alpha+\beta=9$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$\alpha=-3$, $\beta=6$

이것을 ㉡에 대입하면 $a=-18$ 답 ①

$\alpha+\beta>0$이므로 $\alpha$, $\beta$ 중 적어도 하나는 양수이다.
이때 $\alpha>0$, $\beta>0$이라 하면
$|\alpha|+|\beta|=\alpha+\beta=3$
이므로 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 $\alpha<\beta$일 때,
$\alpha<0$, $\beta>0$

다른 풀이 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=a$이고, $|\alpha|+|\beta|=9$이므로

$(|\alpha|+|\beta|)^2=\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|$

$=9-2a+2|a|$

따라서 $9-2a+2|a|=81$이므로

$|a|-a=36$

그런데 $a\geq0$이면 $|a|-a=a-a=0$이므로 $a<0$

즉 $|a|-a=-a-a=-2a$이므로

$-2a=36$ $\therefore a=-18$

**13** 이차방정식 $x^2-x+p=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=p$

이차방정식 $x^2-qx-1=0$의 두 근이 $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$=1+\frac{1}{p}=q$ …… ㉠

$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+2+\frac{1}{\alpha\beta}$

$=2+p+\frac{1}{p}=-1$ …… ㉡

㉠에서 $\frac{1}{p}=q-1$, ㉡에서 $p+\frac{1}{p}=-3$이므로

$p+q-1=-3$

$\therefore p+q=-2$

답 ①

**14** 이차방정식 $(x-2)(x+3)=3x$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로

$(\alpha-2)(\alpha+3)=3\alpha$, $(\beta-2)(\beta+3)=3\beta$

$\therefore (\alpha-2)(\beta-2)(\alpha+3)(\beta+3)=9\alpha\beta$

이때 $(x-2)(x+3)=3x$에서 $x^2-2x-6=0$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=-6$

$\therefore (\alpha-2)(\beta-2)(\alpha+3)(\beta+3)$

$=9\alpha\beta=-54$

답 ①

다른 풀이 $(x-2)(x+3)=3x$에서

$x^2-2x-6=0$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-6$

$\therefore (\alpha-2)(\beta-2)(\alpha+3)(\beta+3)$

$=\{\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4\}\{\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+9\}$

$=(-6-4+4)(-6+6+9)$

$=-54$

**15** 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-2$

한편

$(\alpha^n-\beta^n)(\alpha+\beta)$

$=\alpha^{n+1}+\alpha^n\beta-\alpha\beta^n-\beta^{n+1}$

$=(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})+\alpha\beta(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})$

이므로

$4f(n)=f(n+1)-2f(n-1)$ $(n\geq2)$

위의 식에 $n=9$를 대입하면

$4f(9)=f(10)-2f(8)$

$\therefore \frac{f(10)-2f(8)}{f(9)}=4$

답 ④

**16** 이차방정식 $x^2+x-n=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$ $(\alpha<\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-n$ ⋯ ❶

$n>0$에서 $\alpha\beta=-n<0$이므로

$\alpha<0$, $\beta>0$ ⋯ ❷

이때 $n=-\alpha\beta=(\beta+1)\beta$이므로 $n$은 연속하는 두 자연수의 곱이다.

따라서 두 자리 자연수 $n$의 값이 될 수 있는 수는

$3\cdot4$, $4\cdot5$, $5\cdot6$, $\cdots$, $9\cdot10$

의 7개이다. ⋯ ❸

답 7

> 일품 BOX
>
> $\alpha=\beta$이면 $\alpha+\beta=-1$에서
>
> $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$
>
> 이므로 정수인 조건을 만족시키지 않는다.
>
> $\alpha+\beta=-1$에서
>
> $\alpha=-\beta-1$
>
> $\therefore -\alpha=\beta+1$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 식을 세울 수 있다. | 30 % |
| ❷ $\alpha$, $\beta$의 부호를 구할 수 있다. | 20 % |
| ❸ 자연수 $n$의 개수를 구할 수 있다. | 50 % |

**17** 조건 (나)에서

$6<\alpha+\beta<8$, $5<\alpha\beta<12$

> $0<a<x<b$, $0<c<y<d$일 때
>
> ① $a+c<x+y<b+d$
>
> ② $ac<xy<bd$

이차방정식 $ax^2-bx+3c=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=\frac{b}{a}$이므로

$6<\frac{b}{a}<8$ $\quad\therefore 6a<b<8a$ $(\because a>0)$

이때 조건 (가)에 의하여 $\quad a=1$, $b=7$

또 $\alpha\beta=\frac{3c}{a}=3c$이므로

$5<3c<12$ $\quad\therefore \frac{5}{3}<c<4$

이때 조건 (가)에 의하여 $\quad c=2$ 또는 $c=3$

(i) $c=2$일 때, 주어진 방정식은

$x^2-7x+6=0$, $\quad(x-1)(x-6)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=6$

이때 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $c=3$일 때, 주어진 방정식은

$x^2-7x+9=0$

$\therefore x=\frac{7\pm\sqrt{13}}{2}$

> $3<\sqrt{13}<4$에서
>
> $-4<-\sqrt{13}<-3$
>
> $3<7-\sqrt{13}<4$
>
> $\therefore \frac{3}{2}<\frac{7-\sqrt{13}}{2}<2$
>
> 또 $3<\sqrt{13}<4$에서
>
> $10<7+\sqrt{13}<11$
>
> $\therefore 5<\frac{7+\sqrt{13}}{2}<\frac{11}{2}$

(i), (ii)에서 $c=3$이므로

$a+2b+3c=1+2\cdot7+3\cdot3=24$

답 24

**18** 이차방정식 $x^2+4x-8=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로

$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+4x-8$

이때 $f(\alpha)=2$, $f(\beta)=2$에서

$f(\alpha)-2=0$, $f(\beta)-2=0$

따라서 이차방정식 $f(x)-2=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로

$f(x)-2=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+4x-8$

$\therefore f(x)=x^2+4x-6$

답 ⑤

**19** 이차방정식 $x^2+6x+7=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-6$, $\alpha\beta=7$

$\therefore \alpha<0$, $\beta<0$

즉 $|\alpha|=-\alpha$, $|\beta|=-\beta$이므로 $|\alpha|$, $|\beta|$를 두 근으로 하는 이차방정식은 $-\alpha$, $-\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식과 같다.

따라서

$|\alpha|+|\beta|=-\alpha-\beta$

$=-(\alpha+\beta)=6$,

$|\alpha||\beta|=(-\alpha)\cdot(-\beta)$

$=\alpha\beta=7$

이므로 구하는 이차방정식은 $x^2-6x+7=0$이다.

답 ①

**20** 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$ ⋯ ❶

이때

$(\alpha-3)+(\beta-3)=\alpha+\beta-6$

$=-p-6$,

$(\alpha-3)(\beta-3)=\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9$

$=q+3p+9$

이므로 $\alpha-3$, $\beta-3$을 두 근으로 하고 $x^2$의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2+(p+6)x+3p+q+9=0$ ⋯ ❷

이 이차방정식이 $x^2+qx+p=0$과 같으므로

$p+6=q$, $3p+q+9=p$

$\therefore p-q=-6$, $2p+q=-9$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$p=-5$, $q=1$ ⋯ ❸

$\therefore p^2+q^2=26$ ⋯ ❹

답 26

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 식을 세울 수 있다. | 20 % |
| ❷ $\alpha-3$, $\beta-3$을 두 근으로 하고 $x^2$의 계수가 1인 이차방정식을 세울 수 있다. | 40 % |
| ❸ $p$, $q$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❹ $p^2+q^2$의 값을 구할 수 있다. | 10 % |

**21** $x^2=X$로 놓으면

$x^4-x^2-6$

$=X^2-X-6$

$=(X+2)(X-3)$

$=(x^2+2)(x^2-3)$

> $x^2+2=0$에서
>
> $x^2=-2$
>
> $\therefore x=\pm\sqrt{2}i$
>
> $x^2-3=0$에서
>
> $x^2=3$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{3}$

$=(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

따라서 $x^4-x^2-6$의 인수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

**22** 이차방정식 $5x^2-2x+3=0$의 두 근은

$$x=\frac{1\pm\sqrt{14}i}{5} \quad \cdots ❶$$

따라서 $5x^2-2x+3$을 복소수의 범위에서 인수분해하면

$$5\left(x-\frac{1+\sqrt{14}i}{5}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{14}i}{5}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\{5x-(1+\sqrt{14}i)\}\{5x-(1-\sqrt{14}i)\} \quad \cdots ❷$$

$$\therefore a^2+b^2=(1+\sqrt{14}i)^2+(1-\sqrt{14}i)^2$$

$$=-26 \quad \cdots ❸$$

답 $-26$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 이차방정식 $5x^2-2x+3=0$의 근을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해할 수 있다. | 50 % |
| ❸ $a^2+b^2$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

**23** 계수가 정수인 이차방정식 $x^2-px+q=0$이 서로 다른 두 허근 $z_1$, $z_2$를 가지므로

$z_1=a+bi$, $z_2=a-bi$ ($a$는 실수, $b\neq0$인 실수)

라 하자.

ㄱ. 근과 계수의 관계에 의하여

$$q=z_1z_2$$
$$=a^2+b^2>0$$

> $a$는 실수, $b\neq0$인 실수이므로
> $a^2\geq0$, $b^2>0$
> $\therefore a^2+b^2>0$

ㄴ. $z_1=2z_2$이면 $a+bi=2a-2bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a=2a,\ b=-2b$$
$$\therefore a=b=0$$

그런데 $b\neq0$이어야 하므로 $z_1=2z_2$를 만족시키는 $p$, $q$는 존재하지 않는다.

ㄷ. $z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$이면 $z_1z_2=1$이지만

$p=1$, $q=1$이므로

$$p+q\neq1$$

> $p=z_1+z_2$
> $=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
> $=1$
> $q=z_1z_2$
> $=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\times\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
> $=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

**24** 이차방정식 $x^2-x+2=0$의 한 허근이 $\alpha$이고, 계수가 실수이므로 다른 한 근은 $\overline{\alpha}$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\overline{\alpha}=1,\ \alpha\overline{\alpha}=2$$

또 $z=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$에 대하여

$$\overline{z}=\frac{\overline{\alpha}-1}{\overline{\alpha}+1}$$

> $\overline{z}=\overline{\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)}=\frac{\overline{\alpha-1}}{\overline{\alpha+1}}$
> $=\frac{\overline{\alpha}-1}{\overline{\alpha}+1}$

$$\therefore z\overline{z}=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\cdot\frac{\overline{\alpha}-1}{\overline{\alpha}+1}$$
$$=\frac{\alpha\overline{\alpha}-(\alpha+\overline{\alpha})+1}{\alpha\overline{\alpha}+(\alpha+\overline{\alpha})+1}$$
$$=\frac{2-1+1}{2+1+1}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

## 사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 44~45쪽

**01** 이차방정식 $x^2-abx+a+b+2=0$의 한 근이 1이므로

$$1-ab+a+b+2=0,\quad ab-a-b-3=0$$
$$a(b-1)-(b-1)=4$$
$$\therefore (a-1)(b-1)=4$$

이때 $a$, $b$는 서로 다른 자연수이므로

> $a-1=2$, $b-1=2$이면
> $a=b=3$
> 이므로 $a$, $b$가 서로 다른 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$$a-1=1,\ b-1=4 \text{ 또는 } a-1=4,\ b-1=1$$
$$\therefore a=2,\ b=5 \text{ 또는 } a=5,\ b=2$$

따라서 $ab=10$, $a+b=7$이므로 주어진 방정식의 해는

$$x^2-10x+9=0,\quad (x-1)(x-9)=0$$
$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=9$$

즉 구하는 나머지 한 근은 9이다. 답 9

**02** 가격을 $x$ %만큼 인상한 김밥 한 줄의 가격은 $2000\left(1+\frac{x}{100}\right)$원이고, 이때 김밥의 하루 평균 판매량은 $500\left(1-\frac{2x}{100}\right)$줄이다.

하루 평균 판매액이 28 %만큼 감소하여

$$2000\cdot500\cdot\left(1-\frac{28}{100}\right)(\text{원})$$

이므로

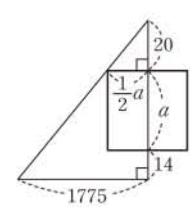
$$2000\left(1+\frac{x}{100}\right)\cdot500\left(1-\frac{2x}{100}\right)$$
$$=2000\cdot500\cdot\left(1-\frac{28}{100}\right)$$

> (가격) × (판매량)
> = (판매액)

$$(100+x)(100-2x)=7200$$
$$x^2+50x-1400=0,\quad (x+70)(x-20)=0$$
$$\therefore x=20\ (\because x>0)$$

답 ③

**03** 주어진 구장산술의 내용을 간단히 그림으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로




$$\frac{1}{2}a : 1775=20 : (a+34)$$
$$\frac{1}{2}a(a+34)=35500$$
$$a^2+34a-71000=0$$
$$(a+284)(a-250)=0$$
$$\therefore a=250\ (\because a>0)$$

답 ②

**04** 주어진 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)$$
$$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$
$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

ㄱ. $a=b=c$이면 $\frac{D}{4}=0$이므로 이차방정식은 중근을 갖는다.

ㄴ. $\frac{D}{4}\ge 0$이므로 이차방정식은 항상 실근을 갖는다.

ㄷ. $a+b+c=0$이면 주어진 이차방정식은

$$3x^2+ab+bc+ca=0$$

이므로 $\quad x=\pm\sqrt{\frac{-(ab+bc+ca)}{3}}$

이때

$$\begin{aligned}&ab+bc+ca\\&=a(b+c)+bc\\&=a(-a)+(-a-c)c\\&=-a^2-ac-c^2\\&=-(a^2+ac+c^2)\\&=-\left\{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}c^2\right\}<0\end{aligned}$$

이므로

$$-(ab+bc+ca)>0$$

따라서 이차방정식은 부호가 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

$a+b+c=0$에서 $b+c=-a$, $b=-a-c$

$a^2+ac+c^2$
$=a^2+ac+\frac{c^2}{4}+\frac{3}{4}c^2$
$=\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}c^2>0$

**05** 이차방정식 $ax^2-32x+16=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=(-16)^2-16a=16^2-16a\ge 0$$

$$\therefore a\le 16$$

이때 이차방정식 $ax^2-32x+16=0$의 근이

$$x=\frac{-(-16)\pm\sqrt{(-16)^2-16a}}{a}$$

이고 적어도 한 개는 정수이므로 $(-16)^2-16a=k^2$ ($k$는 정수) 꼴이어야 한다.

$$\begin{aligned}\therefore k^2&=(-16)^2-16a\\&=16(16-a)=4^2(16-a)\end{aligned}$$

따라서 $16-a$가 정수의 제곱 꼴이어야 하므로

$$a=7 \text{ 또는 } a=12 \text{ 또는 } a=15 \text{ 또는 } a=16$$

$16-a=0$일 때, $a=16$
$16-a=1$일 때, $a=15$
$16-a=4$일 때, $a=12$
$16-a=9$일 때, $a=7$
$16-a\ge 16$이면 $a\le 0$이므로 $a$는 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i) $a=7$일 때,

$$7x^2-32x+16=0$$
$$(7x-4)(x-4)=0$$

이므로 $x=4$의 정수인 근이 존재한다.

한편 이차방정식 $bx^2-7x+7=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 $D_1$이라 하면

$$D_1=(-7)^2-4\cdot 7b\ge 0$$

$$49-28b\ge 0 \qquad \therefore b\le\frac{7}{4}$$

이를 만족시키는 자연수 $b$는 1뿐이므로

$$x^2-7x+7=0$$

그런데 이차방정식의 정수인 근은 존재하지 않는다.

(ii) $a=12$일 때,

$$12x^2-32x+16=0$$
$$4(3x-2)(x-2)=0$$

이므로 $x=2$의 정수인 근이 존재한다.

한편 이차방정식 $bx^2-7x+12=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 $D_2$라 하면

$$D_2=(-7)^2-4\cdot 12b\ge 0$$

$$49-48b\ge 0 \qquad \therefore b\le\frac{49}{48}$$

이를 만족시키는 자연수 $b$는 1뿐이므로

$$x^2-7x+12=0, \qquad (x-3)(x-4)=0$$

이므로 $x=3$, $x=4$의 정수인 근이 존재한다.

(iii) $a=15$일 때,

$$15x^2-32x+16=0$$
$$(5x-4)(3x-4)=0$$

이므로 정수인 근이 존재하지 않는다.

(iv) $a=16$일 때,

$$16x^2-32x+16=0, \qquad 16(x-1)^2=0$$

이므로 $x=1$의 정수인 근이 존재한다.

한편 이차방정식 $bx^2-7x+16=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 $D_3$이라 하면

$$D_3=(-7)^2-4\cdot 16b\ge 0$$

$$49-64b\ge 0 \qquad \therefore b\le\frac{49}{64}$$

이를 만족시키는 자연수 $b$는 존재하지 않는다.

이상에서 $a=12$, $b=1$이므로

$$a+b=13$$

답 13

**06** $g(x)=f(x)+x-3$이라 하면

$$\begin{aligned}g(\alpha)&=f(\alpha)+\alpha-3\\&=\beta+\alpha-3\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(\beta)&=f(\beta)+\beta-3\\&=\alpha+\beta-3\\&=0\end{aligned}$$

따라서 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)+x-3=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 구하는 두 근의 합은

$$\alpha+\beta=3$$

답 3

**07** 이차방정식 $x^2+2x-2=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로

$$\alpha^2+2\alpha-2=0,\ \beta^2+2\beta-2=0$$

또 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-2$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &(\alpha^3+2\alpha^2-\alpha-1)(\beta^3+2\beta^2-\beta-1)\\&=\{\alpha(\alpha^2+2\alpha-2)+\alpha-1\}\\&\quad\times\{\beta(\beta^2+2\beta-2)+\beta-1\}\\&=(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1\\&=-2-(-2)+1=1\end{aligned}$$

답 ③

**08** 이차방정식 $x^2-mx+2m-1=0$의 두 근을 $k$, $2k-1\left(k>\frac{1}{2}\right)$이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

> 두 근이 모두 양수이므로 $k>0$, $2k-1>0$ $\therefore k>\frac{1}{2}$

$k+(2k-1)=m$

$\therefore m=3k-1$ …… ㉠

$k(2k-1)=2m-1$

$\therefore 2k^2-k+1=2m$ …… ㉡

㉡에 ㉠을 대입하여 정리하면

$2k^2-7k+3=0$, $(2k-1)(k-3)=0$

$\therefore k=3\left(\because k>\frac{1}{2}\right)$

따라서 이차방정식의 두 근은 3, $2\cdot3-1=5$이므로

$\alpha=3$

㉠에 $k=3$을 대입하면

$m=3\cdot3-1=8$

$\therefore \alpha m=3\cdot8=24$

답 24

**09** 조건 ㈎에서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{-1+\sqrt{2}i}{2}\cdot\frac{-1-\sqrt{2}i}{2}=\frac{3}{4}$$

이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{c}{a}=\frac{3}{4}$$

조건 ㈏에서 이차방정식 $dx^2+cx+a=0$의 두 근의 합은

$$\frac{-3+\sqrt{7}i}{2}+\frac{-3-\sqrt{7}i}{2}=-3$$

이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{c}{d}=-3 \qquad \therefore \frac{c}{d}=3$$

이때 이차방정식 $cx^2+ax+d=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{a}{c}=-\frac{4}{3},\ \alpha\beta=\frac{d}{c}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{4}{9}$$

답 ④

**10** 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=p$, $\alpha\beta=q$

$q$는 소수이고, $\alpha$, $\beta$는 자연수이므로

$\alpha=1$, $\beta=q$ 또는 $\alpha=q$, $\beta=1$

> 소수 $q$의 약수는 1과 $q$뿐이므로 $q$를 두 자연수의 곱으로 나타내는 경우는 $q=1\cdot q$ 이다.

$\therefore p=\alpha+\beta=q+1$

즉 $p$와 $q$는 연속하는 두 자연수이면서 소수이므로

$p=3$, $q=2$

$\therefore p^2+q^2=3^2+2^2=13$

답 13

**참고** 연속하는 두 자연수 중 하나는 짝수이고, 2를 제외한 짝수는 합성수이므로 연속하는 두 자연수가 모두 소수인 경우는 2, 3뿐이다.

**11** 이차방정식 $f(x+1)=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로

$f(\alpha+1)=0$, $f(\beta+1)=0$

이때 이차방정식 $f(x-2)=0$의 두 근은

$x-2=\alpha+1$ 또는 $x-2=\beta+1$

$\therefore x=\alpha+3$ 또는 $x=\beta+3$

따라서 $f(x-2)=0$의 두 근의 곱은

$$(\alpha+3)(\beta+3)=\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+9$$

$$=5+3\cdot3+9$$

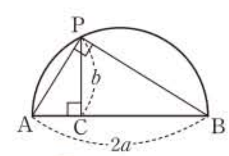
$$=23$$

답 23

**1등급 비밀노트**

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$일 때, 방정식 $f(ax+b)=0$의 두 근은 $ax+b=\alpha$, $ax+b=\beta$를 만족시키는 $x$의 값, 즉 $\frac{\alpha-b}{a}$, $\frac{\beta-b}{a}$이다.

**12** 오른쪽 그림에서




$\overline{AC}+\overline{BC}=2a$

$\triangle PAC$와 $\triangle BPC$에서

$\angle ACP=\angle PCB=90^\circ$,

$\angle APC=\angle PBC$ ($\because \angle APB=90^\circ$)

> 반원에 대한 원주각의 크기는 $90^\circ$이다.

이므로

$\triangle PAC \backsim \triangle BPC$ (AA 닮음)

이때 $\overline{PC}:\overline{AC}=\overline{BC}:\overline{PC}$이므로

$b:\overline{AC}=\overline{BC}:b$

$\therefore \overline{AC}\times\overline{BC}=b^2$

따라서 두 선분 AC, BC의 길이를 두 근으로 하고 $x^2$의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(\overline{AC}+\overline{BC})x+\overline{AC}\times\overline{BC}=0$

$\therefore x^2-2ax+b^2=0$

답 ④

**1등급 비밀노트**

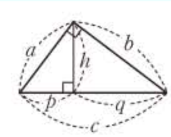
오른쪽 그림과 같은 직각삼각형에서

$ab=ch$,

$a^2=pc$, $b^2=qc$,

$h^2=pq$

가 성립한다.




**13** 조건 ㈎에서 다항식 $f(x)$가 $x-1-i$를 인수로 가지므로 $f(1+i)=0$

즉 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 $1+i$이고, $a$, $b$, $c$가 실수이므로 다른 한 근은 $1-i$이다.

$$\therefore f(x)=a(x-1-i)(x-1+i)$$

$$=a(x^2-2x+2)$$

$$=ax^2-2ax+2a$$

조건 ㈏에서 방정식

$f(x)+1=0$, 즉 $ax^2-2ax+2a+1=0$

의 두 근의 곱이 4이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{2a+1}{a}=4, \qquad 2a+1=4a \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$$

즉 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+1$이므로 $f(ax)-ax=0$에서

$$f\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{2}x=0$$

$$\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x+1-\frac{1}{2}x=0$$

$$\therefore \frac{1}{8}x^2-x+1=0,\ \text{즉 } x^2-8x+8=0$$

따라서 위의 이차방정식의 두 근의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 8이다.

답 8

**14** 주어진 이차방정식의 한 허근이 $\alpha$이고 $\alpha^2$이 실수이므로 $\alpha=pi$ ($p\neq0$인 실수)라 하자. 이때 이차방정식의 계수가 모두 실수이므로 다른 한 근은 $-pi$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$pi+(-pi)=-\frac{k+1}{k},\qquad 0=-\frac{k+1}{k}$$

$$\therefore k=-1$$

$$pi\cdot(-pi)=-\frac{2}{k}$$

$$\therefore p^2=2$$

따라서 $M=2$, $\alpha^2=(pi)^2=-2$이므로

$$\alpha^2+M^2=-2+2^2=2$$

답 2

다른 풀이 $\alpha=pi$ ($p\neq0$인 실수)라 하면 이차방정식 $kx^2+(k+1)x-2=0$의 한 허근이 $\alpha$이므로

$$k\alpha^2+(k+1)\alpha-2=0$$

$$-kp^2+(k+1)pi-2=0$$

$$-(kp^2+2)+(k+1)pi=0$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$kp^2+2=0,\ (k+1)p=0$$

$(k+1)p=0$에서 $p\neq0$이므로

$$k+1=0$$

$$\therefore k=-1$$

$kp^2+2=0$에 $k=-1$을 대입하면

$$p^2=2$$

$$\therefore \alpha^2=-p^2=-2$$

또 주어진 이차방정식은 $-x^2-2=0$, 즉 $x^2+2=0$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$M=2$$

$$\therefore \alpha^2+M^2=-2+2^2=2$$

일품 BOX

$y=ax^2+bx+c$
$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$
에서 그래프의 축의 방정식은
$x=-\frac{b}{2a}$

$\alpha=a+bi$
($a$, $b$는 실수, $b\neq0$)이면
$\alpha^2=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$
이므로 $\alpha^2$이 실수이려면
$2ab=0$
$\therefore a=0$ 또는 $b=0$
이때 $b\neq0$이므로
$a=0$
따라서 허수 $\alpha$는 순허수이다.

# 05 이차방정식과 이차함수

## 개념&핵심 기출

본책 46~48쪽

**01** 이차함수 $y=x^2+2(a-2)x+a^2-8$의 그래프가 $x$축과 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2+2(a-2)x+a^2-8=0$의 판별식을 $D$라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(a-2)^2-(a^2-8)<0$$

$$-4a+12<0\qquad \therefore a>3$$

따라서 정수 $a$의 값 중 가장 작은 값은 4이다.

답 ④

**02** ㄱ. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

또 그래프의 축이 $y$축의 오른쪽에 있으므로

$$-\frac{b}{2a}>0\qquad \therefore b>0\ (\because a<0)$$

$$\therefore ab<0$$

ㄴ. $x=-2$를 $y=ax^2+bx+c$에 대입하면

$$y=4a-2b+c$$

이때 주어진 그래프에서 $x=-2$일 때 $y<0$이므로

$$4a-2b+c<0$$

ㄷ. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 $x$축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 $D$라 하면

$$D=b^2-4ac>0$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

다른 풀이 ㄱ. 주어진 이차함수의 그래프와 $x$축의 교점의 $x$좌표가 $-1$, 3이므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 $-1$, 3이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{b}{a}=-1+3=2>0$$

따라서 $\frac{b}{a}<0$이므로 $\quad ab<0$

**03** 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 $x$축의 교점의 $x$좌표가 $\alpha$, $\alpha+1$이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\alpha$, $\alpha+1$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+(\alpha+1)=-a,\ \text{즉 } 2\alpha+1=-a \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\alpha(\alpha+1)=b \quad \cdots\cdots ㉡$$

또 이차함수 $y=2x^2-ax-2b$의 그래프와 $x$축의 교점의 $x$좌표가 $\alpha-2$, $\alpha$이므로 이차방정식 $2x^2-ax-2b=0$의 두 근이 $\alpha-2$, $\alpha$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$(\alpha-2)+\alpha=\frac{a}{2},\ \text{즉 } 2\alpha-2=\frac{a}{2} \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha=-2$

$\alpha=\frac{1}{2}$을 ㉡에 대입하면 $b=\frac{3}{4}$

$\therefore a+b+\alpha=-\frac{3}{4}$ 답 $-\frac{3}{4}$

판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-4\cdot(-1)$
$=5>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$(\alpha-2)\alpha=\frac{-2b}{2}$에 $\alpha=\frac{1}{2}$을 대입하여 $b$의 값을 구할 수도 있다.

**04** 이차함수 $y=x^2+ax+10$의 그래프와 직선 $y=-ax+b^2$이 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2+ax+10=-ax+b^2$, 즉 $x^2+2ax-b^2+10=0$의 판별식을 $D$라 할 때

$\frac{D}{4}=a^2-(-b^2+10)<0$

$\therefore a^2+b^2<10$

따라서 자연수 $a$, $b$의 순서쌍 $(a, b)$는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$

의 4개이다. 답 4

이차함수의 그래프와 $x$축의 교점의 $x$좌표가 $\alpha$, $\beta$인 이차함수의 식은
$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$
$(a\neq0)$

$1^2+1^2=2$, $1^2+2^2=5$,
$2^2+1^2=5$, $2^2+2^2=8$

**05** 이차방정식 $x^2+a=bx$, 즉 $x^2-bx+a=0$의 한 근이 $2+\sqrt{2}$이고, $a$, $b$가 유리수이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{2}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$b=(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})=4$,

$a=(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=2$

이므로 $a+b=6$ 답 ③

**06** 이차함수 $y=x^2-2ax+a^2+2$의 그래프와 직선 $y=4x-k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2-2ax+a^2+2=4x-k$, 즉 $x^2-2(a+2)x+(a^2+2+k)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+2)\}^2-(a^2+2+k)>0$

$\therefore k<4a+2$

(i) $a=1$일 때, $k<6$이므로 $f(1)=5$
(ii) $a=2$일 때, $k<10$이므로 $f(2)=9$
(iii) $a=3$일 때, $k<14$이므로 $f(3)=13$
(iv) $a=4$일 때, $k<18$이므로 $f(4)=17$

이상에서

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=44$ 답 44

$a$가 자연수이므로 $k<4a+2$를 만족시키는 자연수 $k$의 개수는 $4a+1$이다.
따라서 $f(a)=4a+1$임을 이용할 수도 있다.

**07** 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 $x$좌표와 같으므로 주어진 그래프에서 $-3$, $0$, $2$이다.

따라서 $a=3$, $b=-3+0+2=-1$이므로

$a-b=4$ 답 ③

**08** 두 이차함수 $y=x^2+2x-3$, $y=-3x^2+4x-2$의 그래프의 교점의 $x$좌표는 이차방정식 $x^2+2x-3=-3x^2+4x-2$, 즉 $4x^2-2x-1=0$의 실근과 같다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여 이차방정식의 두 실근의 합이 $\frac{1}{2}$이므로 두 함수의 그래프의 교점의 $x$좌표의 합은 $\frac{1}{2}$이다. 답 ⑤

**09** 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축의 교점의 $x$좌표가 $\alpha$, $\beta$이고 $x^2$의 계수가 1이므로

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$

이차함수 $y=g(x)$의 그래프와 $x$축의 교점의 $x$좌표가 $\alpha$, $\gamma$이고 $x^2$의 계수가 1이므로

$g(x)=(x-\alpha)(x-\gamma)$

$\therefore 2g(x)=2(x-\alpha)(x-\gamma)$

$f(x)=2g(x)$에서 $2g(x)-f(x)=0$이므로

$2(x-\alpha)(x-\gamma)-(x-\alpha)(x-\beta)=0$

$(x-\alpha)\{2(x-\gamma)-(x-\beta)\}=0$

$(x-\alpha)(x-2\gamma+\beta)=0$

$\therefore x=\alpha$ 또는 $x=2\gamma-\beta$

따라서 구하는 모든 근의 합은 $\alpha-\beta+2\gamma$이다. 답 ③

**10** $y=ax^2+4x+a-2$

$=a\left(x^2+\frac{4}{a}x+\frac{4}{a^2}\right)-\frac{4}{a}+a-2$

$=a\left(x+\frac{2}{a}\right)^2-\frac{4}{a}+a-2$

이 함수가 $x=2$에서 최댓값을 가지므로

$a<0$, $-\frac{2}{a}=2$

$\therefore a=-1$

따라서 $y=x^2-x-1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$이므로 $x=\frac{1}{2}$에서 최솟값 $-\frac{5}{4}$를 갖는다. 답 $-\frac{5}{4}$

**11** 이차함수 $y=ax^2+bx+c$가 $x=3$에서 최댓값 $k$를 가지므로

$y=a(x-3)^2+k$

이 함수의 그래프가 두 점 $(4, 5)$, $(5, 2)$를 지나므로

$5=a(4-3)^2+k$ $\therefore a+k=5$ …… ㉠

$2=a(5-3)^2+k$ $\therefore 4a+k=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $k=6$

즉 주어진 이차함수는

$y=-(x-3)^2+6=-x^2+6x-3$

이므로 $b=6$, $c=-3$

$\therefore a+b+c+k=8$ 답 8

**12** $y=x^2-2ax+2a+3$

$\quad=(x-a)^2-a^2+2a+3$

에서 $x=a$일 때 최솟값 $-a^2+2a+3$을 가지므로

$m=-a^2+2a+3$

$\quad=-(a-1)^2+4$

따라서 $m$은 $a=1$일 때 최댓값 4를 갖는다. 답 4

**13** $f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$

이므로 $-1\le x\le a$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 최댓값은 $f(-1)$, $f(a)$ 중 큰 값이다.

그런데 $f(-1)=6$이므로 $f(a)=11$이어야 한다.

즉 $a^2-2a+3=11$이므로

$a^2-2a-8=0, \qquad (a+2)(a-4)=0$

$\therefore a=4\ (\because a>-1)$

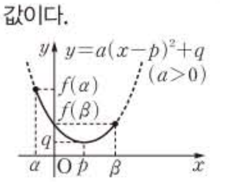
$\therefore f\left(\dfrac{a}{2}\right)=f(2)=3$ 답 ③

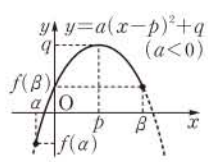
참고 $x$의 값의 범위가 $\alpha\le x\le\beta$일 때, 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은 다음과 같다.

① $\alpha\le p\le\beta$일 때,

(i) $a>0$이면 최솟값은 $q$이고, 최댓값은 $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이다.

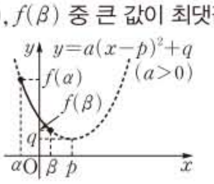
(ii) $a<0$이면 최댓값은 $q$이고, 최솟값은 $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 작은 값이다.

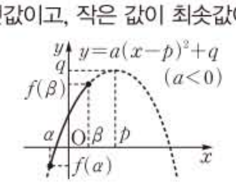



② $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$일 때,

$f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값이고, 작은 값이 최솟값이다.




**14** $x+y^2=1$에서 $\qquad y^2=1-x \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$y$는 실수이므로 $\qquad y^2=1-x\ge0 \qquad \therefore x\le1$

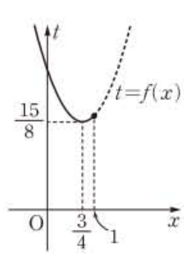
$2x^2+3y^2$에 ㉠을 대입하면

$2x^2+3y^2=2x^2+3(1-x)$

$\quad=2x^2-3x+3$

$\quad=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{15}{8}$

$f(x)=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{15}{8}$라 하면 $x\le1$에서 함수 $t=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=\dfrac{3}{4}$에서 최솟값 $\dfrac{15}{8}$를 갖는다.




즉 $2x^2+3y^2$의 최솟값은 $\dfrac{15}{8}$이다. 답 ②

**15** 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x$축과 만나는 교점의 $x$좌표가 $-1$, 3이므로

$f(x)=a(x+1)(x-3)\ (a>0)$

으로 놓을 수 있다.

이때 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, -6)$을 지나므로

$-6=a\cdot1\cdot(-3) \qquad \therefore a=2$

$\therefore f(x)=2(x+1)(x-3)$

$\quad=2(x^2-2x-3)$

$\quad=2(x-1)^2-8$

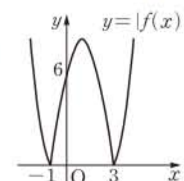
따라서 $0\le x\le4$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $-8$을 갖고, $x=4$일 때 최댓값 10을 가지므로

$-8\le f(x)\le10$

$\therefore 0\le|f(x)|\le10$

따라서 함수 $y=|f(x)|$의 최댓값과 최솟값의 합은 10이다. 답 10

참고 $f(x)=2(x+1)(x-3)$일 때, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




**16** $y=-x^2+6x=-(x-3)^2+9$

이므로 두 점 A, B와 두 점 C, D는 각각 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.

$A(3-t, 0)$, $B(3+t, 0)$ $(0<t<3)$이라 하면

두 점 A, B가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로 두 점 A, B는 각각 점 $(3, 0)$에서 같은 거리 $t$만큼 떨어져 있다.

$C(3+t, -t^2+9)$, $D(3-t, -t^2+9)$

$\therefore \overline{AB}=\overline{CD}=2t$, $\overline{AD}=\overline{BC}=-t^2+9$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$2\{2t+(-t^2+9)\}=-2t^2+4t+18$

$\qquad=-2(t-1)^2+20$

이므로 $0<t<3$에서 $t=1$일 때 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 20이다. 답 20

**17** 1인당 입장료를 $50x$원 인상하면 하루 입장객 수는 $200x$명 감소하므로 하루 입장료 수입은

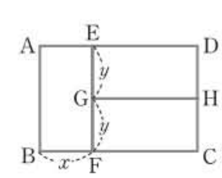
$(600+50x)(4000-200x)$

$=-10000(x^2-8x-240)$

$=-10000(x-4)^2+2560000$

따라서 $x=4$일 때 입장료 수입이 최대가 되므로 1인당 입장료를 $50\cdot4=200$(원) 인상해야 한다. 답 ②

**18** 오른쪽 그림과 같이




$\overline{BF}=x$, $\overline{EG}=\overline{GF}=y$

$(x>0, y>0)$

라 하면

□EGHD, □GFCH의 가로의 길이와 넓이가 같으므로 세로의 길이도 같다.

□ABFE$=x\cdot2y=2xy$

$\square EGHD=\overline{ED}\cdot y$

두 직사각형의 넓이가 같으므로

$2xy=\overline{ED}\cdot y \quad \therefore \overline{ED}=2x \ (\because y>0)$

한편 철망의 길이가 100이므로

$8x+6y=100 \quad \therefore y=-\frac{4}{3}x+\frac{50}{3}$

$\overline{AD}+\overline{BC}+\overline{GH}+\overline{AB}+\overline{EF}+\overline{DC}$
$=3x\cdot 2+2x+2y\cdot 3$
$=8x+6y$

전체 우리의 넓이는

$3x\cdot 2y=6x\left(-\frac{4}{3}x+\frac{50}{3}\right)=-8\left(x^2-\frac{25}{2}x\right)$

$=-8\left(x-\frac{25}{4}\right)^2+\frac{625}{2}$

이때 $0<8x<100$에서 $0<x<\frac{25}{2}$이므로 $x=\frac{25}{4}$일 때

전체 우리의 넓이의 최댓값은 $\frac{625}{2}$이다. 답 $\frac{625}{2}$

## 1등급을 위한 고난도 문제 본책 49~51쪽

**01** $f(x)=a(x+5)(x-3)\ (a<0)$이라 하면

$f\left(\frac{x-2}{3}\right)=a\left(\frac{x-2}{3}+5\right)\left(\frac{x-2}{3}-3\right)$

$=\frac{a}{9}(x+13)(x-11)$

$f\left(\frac{x-2}{3}\right)=0$에서 $\quad x=-13$ 또는 $x=11$

따라서 방정식 $f\left(\frac{x-2}{3}\right)=0$의 두 근의 합은 $-2$이다.

답 ②

다른 풀이 방정식 $f(x)=0$의 근이 $x=\alpha$이면 방정식 $f\left(\frac{x-2}{3}\right)=0$의 근은 $\frac{x-2}{3}=\alpha$에서 $x=3\alpha+2$이다.

이때 방정식 $f(x)=0$의 근이 $x=-5$ 또는 $x=3$이므로 방정식 $f\left(\frac{x-2}{3}\right)=0$의 근은

$x=3\cdot(-5)+2$ 또는 $x=3\cdot 3+2$

$\therefore x=-13$ 또는 $x=11$

따라서 두 근의 합은 $-2$이다.

**02** $x^2$의 계수가 1이므로

$f(x)=x^2+ax+b$ ($a$, $b$는 상수)

라 하면 조건 (가)에서 $f(-1)=f(5)$이므로

$1-a+b=25+5a+b$

$6a=-24 \quad \therefore a=-4$ ···➊

조건 (나)에 의하여 이차방정식 $x^2-4x+b=0$의 두 실근의 곱이 $-2$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$b=-2$ ···➋

따라서 이차방정식 $x^2-4x-2=0$의 실근은

$x=2\pm\sqrt{(-2)^2-(-2)}=2\pm\sqrt{6}$ ···➌

이므로 구하는 $x$좌표의 차는

$2+\sqrt{6}-(2-\sqrt{6})=2\sqrt{6}$ ···➍

답 $2\sqrt{6}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ $a$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ➋ $b$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ➌ 이차방정식의 실근을 구할 수 있다. | 30 % |
| ➍ $x$좌표의 차를 구할 수 있다. | 10 % |

**03** $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)\ (\alpha<\beta)$이라 하면 $\alpha$, $\beta$는 이차방정식 $x^2+ax+2a=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a, \ \alpha\beta=2a$ ······ ㉠

이때 $\overline{AB}=2$이므로 $\quad \beta-\alpha=2$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에 대입하면

$2^2=(-a)^2-4\cdot 2a$

$\therefore a^2-8a-4=0$

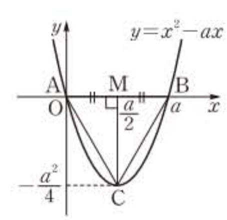
판별식을 $D$라 하면
$\frac{D}{4}=(-4)^2-(-4)$
$=20>0$
이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 $a$의 값의 합은 8이다. 답 ④

**04** $x^2-ax=0$에서 $\quad x(x-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a$

A(0, 0), B($a$, 0)이라 하면 이차함수 $y=x^2-ax$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고




$y=x^2-ax$

$=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$

에서 꼭짓점 C의 좌표는 $\quad \left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4}\right)$

이때 △ABC는 한 변의 길이가 $a$인 정삼각형이므로 선분 AB의 중점을 M이라 하면

$\overline{MC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}, \quad \frac{a^2}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\frac{a}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2} \ (\because a\neq 0)$

$\therefore a=2\sqrt{3}$ 답 ⑤

**05** 이차함수 $y=x^2+ax-5$의 그래프와 직선 $y=x+b$의 교점의 $x$좌표가 $-3$, 2이므로 이차방정식 $x^2+ax-5=x+b$, 즉 $x^2+(a-1)x-5-b=0$의 두 근이 $-3$, 2이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+2=-(a-1) \quad \therefore a=2$

$-3\cdot 2=-5-b \quad \therefore b=1$

$\therefore a+b=3$ 답 3

일품 BOX

**06** 이차함수 $y=x^2-2ax+a^2+2a-1$의 그래프와 직선 $y=mx+n$이 접하므로 이차방정식

$x^2-2ax+a^2+2a-1=mx+n$, 즉

$x^2-(2a+m)x+a^2+2a-n-1=0$

의 판별식을 $D$라 하면

$D=\{-(2a+m)\}^2-4(a^2+2a-n-1)=0$

$4am+m^2-8a+4n+4=0$

$\therefore (4m-8)a+m^2+4n+4=0$

이 식이 $a$에 대한 항등식이므로

$4m-8=0,\ m^2+4n+4=0$

$\therefore m=2,\ n=-2$

$\therefore m+n=0$

답 0

다음은 모두 $k$에 대한 항등식을 나타낸다.
① $k$의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식
② 모든 $k$에 대하여 성립하는 등식
③ 임의의 $k$에 대하여 성립하는 등식

**07** 이차함수 $y=x^2-4x$, 즉 $y=(x-2)^2-4$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-3$만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$y-2=(x+3-2)^2-4$

$\therefore y=(x+1)^2-2$ ··· ❶

두 점 P, Q의 $x$좌표는 이차방정식 $(x+1)^2-2=mx$, 즉 $x^2+(2-m)x-1=0$의 근이다. ··· ❷

이때 선분 PQ의 중점이 원점이므로 이차방정식 $x^2+(2-m)x-1=0$의 두 근의 합이 0이다. ··· ❸

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$-(2-m)=0 \qquad \therefore m=2$ ··· ❹

답 2

이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $p$만큼, $y$축의 방향으로 $q$만큼 평행이동한 그래프의 식
➡ $y=a(x-p)^2+q$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 평행이동한 이차함수의 식을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ 두 점 P, Q의 $x$좌표가 방정식의 근임을 알 수 있다. | 30 % |
| ❸ 방정식의 두 근의 합이 0임을 알 수 있다. | 30 % |
| ❹ $m$의 값을 구할 수 있다. | 10 % |

**08** ㄱ. 이차함수 $y=x^2-ax+ad$의 그래프가 $x$축과 만나려면 이차방정식 $x^2-ax+ad=0$의 판별식을 $D$라 할 때,

$D=(-a)^2-4ad\geq 0, \qquad a(a-4d)\geq 0$

이때 $a>0$이므로 $\qquad a-4d\geq 0 \qquad \therefore a\geq 4d$

위의 부등식을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ d)$는 $(4,\ 1)$, $(5,\ 1)$, $(6,\ 1)$의 3개이다.

ㄴ. 이차방정식 $x^2-ax+ad=dx+bc$, 즉

$x^2-(a+d)x+ad-bc=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=\{-(a+d)\}^2-4(ad-bc)$

$=a^2-2ad+d^2+4bc$

$=(a-d)^2+4bc$

이때 $(a-d)^2\geq 0$, $4bc>0$이므로 $D>0$이다.

따라서 이차함수 $y=x^2-ax+ad$의 그래프와 직선 $y=dx+bc$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

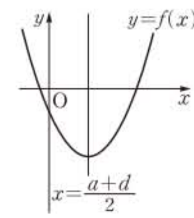
ㄷ. $f(x)=x^2-(a+d)x+ad-bc$라 하면

$f(x)=\left(x-\dfrac{a+d}{2}\right)^2-\dfrac{(a+d)^2}{4}+ad-bc$

이므로 이차함수 $y=f(x)$의 축의 방정식은

$x=\dfrac{a+d}{2}>0$

ㄴ에서 방정식 $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




따라서 이차방정식 $f(x)=0$은 양의 실근을 적어도 하나 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

**09** 두 이차함수의 그래프가 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2+2ax-b=-2x^2-6$, 즉

$3x^2+2ax-(b-6)=0$의 판별식을 $D$라 할 때,

$\dfrac{D}{4}=a^2+3(b-6)<0 \qquad \therefore b<-\dfrac{1}{3}a^2+6$

위의 부등식을 만족시키는 음이 아닌 두 정수 $a$, $b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는

(i) $a=0$일 때,

$b<-\frac{1}{3}\cdot 0^2+6=6$

$(0,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(0,\ 2)$, $(0,\ 3)$, $(0,\ 4)$, $(0,\ 5)$의 6개

(ii) $a=1$일 때,

$b<-\frac{1}{3}\cdot 1^2+6=\frac{17}{3}$

$(1,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(1,\ 4)$, $(1,\ 5)$의 6개

(iii) $a=2$일 때,

$b<-\frac{1}{3}\cdot 2^2+6=\frac{14}{3}$

$(2,\ 0)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(2,\ 4)$의 5개

(iv) $a=3$일 때,

$b<-\frac{1}{3}\cdot 3^2+6=3$

$(3,\ 0)$, $(3,\ 1)$, $(3,\ 2)$의 3개

(v) $a=4$일 때,

$b<-\frac{1}{3}\cdot 4^2+6=\frac{2}{3}$

$(4,\ 0)$의 1개

이상에서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$6+6+5+3+1=21$

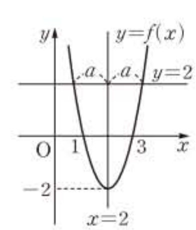
답 ④

**10** $|f(x)|=2$에서 $\qquad f(x)=2$ 또는 $f(x)=-2$

(i) $f(x)=2$일 때,

오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$는 서로 다른 두 점에서 만난다. 이때 두 교점은 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 두 교점의 $x$좌표를 각각 $2+a$, $2-a$라 하면 두 교점의 $x$좌표의 합은

$\frac{1+3}{2}=2$

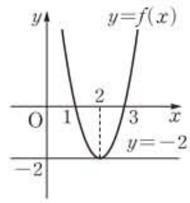


$(2+a)+(2-a)=4$

따라서 방정식 $f(x)=2$의 모든 실근의 합은 4이다.

(ii) $f(x)=-2$일 때,

오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-2$는 접하고 접점의 $x$좌표는 2이므로 방정식 $f(x)=-2$의 실근은 $x=2$이다.




(i), (ii)에서 서로 다른 모든 실근의 합은

$4+2=6$

답 ③

다른 풀이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축과의 교점의 $x$좌표가 1, 3이므로

$f(x)=a(x-1)(x-3)$ $(a>0)$

이라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2, -2)$이므로

$-2=a\cdot1\cdot(-1)$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore f(x)=2(x-1)(x-3)=2x^2-8x+6$

(i) $f(x)=2$일 때,

$2x^2-8x+6=2,\quad x^2-4x+2=0$

$\therefore x=2\pm\sqrt{2}$

(ii) $f(x)=-2$일 때,

$2x^2-8x+6=-2,\quad x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0\quad\therefore x=2$

(i), (ii)에서 서로 다른 모든 실근의 합은

$(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})+2=6$

**11** 이차방정식 $x^2-2f(t)x+f(t)=0$이 중근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 할 때,

$\frac{D}{4}=\{-f(t)\}^2-f(t)=0,\quad f(t)\{f(t)-1\}=0$

$\therefore f(t)=0$ 또는 $f(t)=1$

(i) $f(t)=0$일 때,

함수 $y=f(t)$의 그래프와 $x$축의 교점의 개수는 4이므로 방정식 $f(t)=0$의 실근의 개수는 4이다.

(ii) $f(t)=1$일 때,

함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 개수는 3이므로 방정식 $f(t)=1$의 실근의 개수는 3이다.

(i), (ii)에서 실수 $t$의 개수는

$4+3=7$

답 ③

**12** $y=-x^2+(2a+4)x+a-1$

$=-\{x^2-2(a+2)x+(a+2)^2\}$
$\quad+(a+2)^2+a-1$

$=-\{x-(a+2)\}^2+a^2+5a+3$

에서

$p=a+2,\ q=a^2+5a+3$

$\therefore p+q=a^2+6a+5=(a+3)^2-4$

따라서 $p+q$는 $a=-3$일 때 최솟값 $-4$를 갖는다.

답 ①

주어진 함수의 그래프가 아래로 볼록하므로
$a>0$

**13** (i) $b=-a^2+\frac{1}{2}a+\frac{35}{16}=-\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{4}$

에서 이차함수 $b=-\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{4}$의 최댓값은 $\frac{9}{4}$이므로

$b\le\frac{9}{4}$

이때 위의 부등식을 만족시키는 자연수 $b$의 최댓값은 2이므로

$M_1=2$

(ii) $n=-m^2+\frac{1}{2}m+2=-\left(m-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{33}{16}$

에서 이차함수 $n=-\left(m-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{33}{16}$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{1}{4},\ \frac{33}{16}\right)$이고, $m$은 자연수이므로 $m=1$일 때 실수 $n$의 최댓값은 $\frac{3}{2}$이다.

$\therefore M_2=\frac{3}{2}$

(i), (ii)에서 $\quad M_1M_2=3$

답 3

이차함수
$n=-m^2+\frac{1}{2}m+2$는
$m\ge\frac{1}{4}$인 범위에서 감소하므로 $m$의 값이 $m\ge\frac{1}{4}$인 자연수 중에서 가장 작은 수인 1일 때 $n$이 최대이다.

**14** $y=x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$,

$y=x^2+bx+a=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+a$에서 두 이차함수의 최솟값은 각각 $-\frac{a^2}{4}+b,\ -\frac{b^2}{4}+a$이다. ❶

최솟값이 같으므로

$-\frac{a^2}{4}+b=-\frac{b^2}{4}+a$

$a^2-b^2+4(a-b)=0$

$(a+b)(a-b)+4(a-b)=0$

$(a-b)(a+b+4)=0$

이때 $a\ne b$이므로 $\quad a+b+4=0$

$\therefore a+b=-4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠ ❷

두 이차함수의 그래프의 교점이 $(p,\ q)$이므로

$p^2+ap+b=p^2+bp+a$

$(a-b)p-(a-b)=0$

$(a-b)(p-1)=0$

이때 $a\ne b$이므로 $\quad p-1=0\quad\therefore p=1$

$q=p^2+ap+b$에 $p=1$을 대입하면

$q=1+a+b$

$=1-4$ ($\because$ ㉠)

$=-3$ ❸

$\therefore p+q=-2$ ❹

답 $-2$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 두 이차함수의 최솟값을 각각 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $a+b$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❸ $p$, $q$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❹ $p+q$의 값을 구할 수 있다. | 10 % |

**15** $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$라 하면 조건 (가)에 의하여 $\quad f(0)=c=1$

조건 (나)에 의하여

$$a(x+1)^2+b(x+1)+c-(ax^2+bx+c)=2x$$

$$\therefore 2ax+a+b=2x$$

이 식이 $x$에 대한 항등식이므로

$$2a=2,\ a+b=0$$

$$\therefore a=1,\ b=-1$$

$$\therefore f(x)=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

따라서 $-1\le x\le1$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 3을 갖고, $x=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $\frac{3}{4}$을 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$$3+\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$$

답 ⑤

**16** (i) $a>0$일 때,

$0\le x\le3$에서 $y=a(x-2)^2+4$는 $x=2$일 때 최솟값 4를 갖고, $x=0$일 때 최댓값 $4a+4$를 가지므로

$$4a+4=8 \qquad \therefore a=1$$

(ii) $a<0$일 때,

$0\le x\le3$에서 $y=a(x-2)^2+4$는 $x=2$일 때 최댓값 4를 갖고, $x=0$일 때 최솟값 $4a+4$를 가지므로

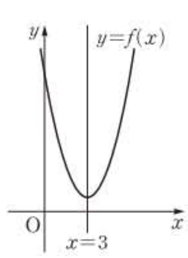
$$4a+4=-4 \qquad \therefore a=-2$$

(i), (ii)에서 $\alpha=1$, $\beta=-2$이므로

$$\alpha-\beta=3$$

답 ②

**17** $f(x)=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$




이므로 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.

(i) $a=\frac{3}{2}$일 때,

주어진 범위에서 $f(x)$의 최댓값은

$$f(a)=f(a+3)$$

$f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{9}{2}\right)=\frac{13}{4}$

(ii) $a<\frac{3}{2}$일 때,

주어진 범위에서 $f(x)$의 최댓값은 $\quad f(a)$

(iii) $a>\frac{3}{2}$일 때,

주어진 범위에서 $f(x)$의 최댓값은

$$f(a+3)$$

이상에서 $k=\frac{3}{2}$이므로

$$g(a)=f(a)=a^2-6a+10,$$

$$h(a)=f(a+3)=a^2+1$$

$$\therefore g(-3)+h(3)=\{(-3)^2-6\cdot(-3)+10\}+(3^2+1)=47$$

답 47

**1등급 비밀노트**

$f(a)$와 $f(a+3)$의 값이 같으면 그 값이 최댓값이고, $f(a)$와 $f(a+3)$의 값이 다르면 둘 중 큰 값이 최댓값이다.
따라서 $a\le x\le a+3$에 꼭짓점의 $x$좌표가 속하는지의 여부와 관계없이 $f(a)$와 $f(a+3)$의 값의 대소가 바뀌는 $a$의 값이 $k$의 값이다.

**18** $x^2-4x+2=t$로 놓으면

$$t=(x-2)^2-2$$

이므로 $1\le x\le4$에서 $x=4$일 때 최댓값 2를 갖고, $x=2$일 때 최솟값 $-2$를 갖는다.

$$\therefore -2\le t\le2 \qquad \cdots ❶$$

이때 주어진 함수는

$$y=t^2+6t-1=(t+3)^2-10$$

이므로 $-2\le t\le2$에서 $t=2$일 때 최댓값 15를 갖고, $t=-2$일 때 최솟값 $-9$를 갖는다. $\cdots$ ❷

따라서 $M=15$, $m=-9$이므로

$$M-m=24 \qquad \cdots ❸$$

답 24

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 공통부분을 $t$로 놓고 $t$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 40 % |
| ❷ 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❸ $M-m$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

**19** $\overline{QR}=\overline{PS}=x\ (0<x<10)$, $\overline{PQ}=\overline{SR}=y\ (0<y<5)$라 하면

∠A는 공통, ∠APS=∠ABC

$\triangle APS\backsim\triangle ABC$ (AA 닮음)이므로

두 삼각형 APS, ABC의 높이의 비

$$x:10=(5-y):5$$

$$5x=50-10y$$

$$\therefore y=-\frac{1}{2}x+5$$

따라서 □PQRS의 넓이는

$$xy=x\left(-\frac{1}{2}x+5\right)=-\frac{1}{2}(x^2-10x)=-\frac{1}{2}(x-5)^2+\frac{25}{2}$$

이므로 $0<x<10$에서 $x=5$일 때 □PQRS의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{2}$이다. 답 ⑤

**20** 과자 한 개의 판매 가격을 $(1000+10k)$원이라 하면 과자의 하루 판매량은 $(500-20k)$개이므로 하루 판매 수익은

$$(1000+10k)(500-20k)-\{350(500-20k)+3000\}$$
$$=200(100+k)(25-k)-1000(-7k+178)$$
$$=-200\{k^2+75k-2500+5(-7k+178)\}$$
$$=-200(k^2+40k-1610)$$
$$=-200(k+20)^2+402000$$

따라서 $k=-20$일 때 하루 판매 수익이 최대이므로 이때의 과자 한 개의 판매 가격은

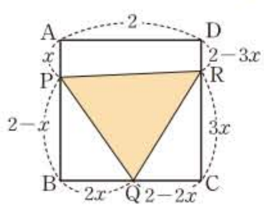
$1000+10\cdot(-20)=800$(원) 답 800원

$k<0$이므로 가격을 인하한 것이다.

**21** $\overline{BQ}=2\overline{AP}$, $\overline{CR}=3\overline{AP}$이므로 $\overline{AP}=x$라 하면

$\overline{BQ}=2x$, $\overline{CR}=3x$ ··· ❶

오른쪽 그림에서 △PQR의 넓이는




□ABCD−△PBQ −△CRQ−□APRD

$=4-\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot(2-x)$
$\quad-\frac{1}{2}\cdot(2-2x)\cdot 3x-\frac{1}{2}\cdot\{x+(2-3x)\}\cdot 2$

$=4x^2-3x+2=4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{23}{16}$ ··· ❷

이므로 $0\le 3x\le 2$, 즉 $0\le x\le\frac{2}{3}$에서 $x=\frac{3}{8}$일 때 △PQR의 넓이의 최솟값은 $\frac{23}{16}$이다. ··· ❸

답 $\frac{23}{16}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CR}$의 길이를 같은 문자로 나타낼 수 있다. | 20 % |
| ❷ 넓이에 대한 식을 세울 수 있다. | 50 % |
| ❸ 넓이의 최솟값을 구할 수 있다. | 30 % |

## 사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 52쪽

**01** 이차방정식 $ax^2+4ax+b=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4 \quad \therefore \beta=-\alpha-4$

이때 $-5<\alpha<-4$이므로

$4<-\alpha<5 \quad \therefore 0<-\alpha-4<1$

$\therefore 0<\beta<1$ 답 ③

다른 풀이 $y=ax^2+4ax+b=a(x+2)^2-4a+b$이므로 주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식은

$x=-2$

따라서 두 점 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$은 직선 $x=-2$에 대하여 대칭이므로 $\alpha$의 값의 범위가 $-5<\alpha<-4$이면 $\beta$의 값의 범위는 $0<\beta<1$이다.

**02** 점 A의 좌표를 $(a, k)$ $(a>0)$라 하면 점 A는 곡선 $y=2x^2-m$ 위의 점이므로

$k=2a^2-m$ ······ ㉠

또 $C(0, -m)$이고 △ABC의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot(k+m)=16$

$\therefore a(k+m)=16$ ······ ㉡

㉠에서 $k+m=2a^2$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$2a^3=16, \quad a^3=8$

이때 $a$는 실수이므로 $a=2$ 답 ③

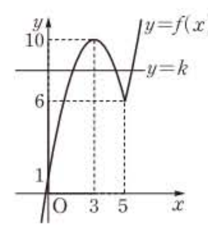
**03** $x<5$일 때,

$f(x)=-x^2+6x+1=-(x-3)^2+10$

$x\ge 5$일 때,

$f(x)=x^2-6x+11=(x-3)^2+2$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




따라서 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$6<k<10$

$k<6$ 또는 $k>10$일 때 한 점에서 만나고, $k=6$ 또는 $k=10$일 때 서로 다른 두 점에서 만난다.

즉 정수 $k$는 7, 8, 9이므로 모든 정수 $k$의 값의 합은

$7+8+9=24$ 답 24

**04** 이차방정식 $f(x)=mx+n$, 즉 $f(x)-mx-n=0$이 중근 $\alpha$를 갖고, $x^2$의 계수가 1이므로

$f(x)-mx-n=(x-\alpha)^2$

$\therefore f(x)=(x-\alpha)^2+mx+n$

같은 방법으로 하면

$g(x)=(x-\beta)^2+mx+n$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 $x$좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같으므로

$(x-\alpha)^2+mx+n=(x-\beta)^2+mx+n$

$(x-\alpha)^2=(x-\beta)^2$

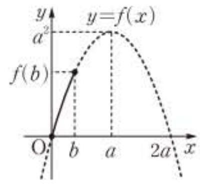
$-2\alpha x+\alpha^2=-2\beta x+\beta^2$

$2(\alpha-\beta)x=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

$\therefore x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ $(\because \alpha\ne\beta)$ 답 ⑤

**05** $f(x)=-x^2+2ax=-(x-a)^2+a^2$이라 하면

(i) $b<a$인 경우




주어진 이차함수는 $0\le x\le b$에서 $x=b$일 때 최댓값 $f(b)$를 가지므로

$-b^2+2ab=9$

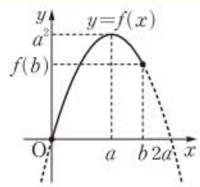
$\therefore b(2a-b)=9$

이때 $a$, $b$는 자연수이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(5,\ 1)$의 1개

$b=1$일 때 $2a-1=9$에서 $a=5$
$b=3$일 때 $2a-3=3$에서 $a=3$
$b=9$일 때 $2a-9=1$에서 $a=5$
따라서 $0<b<a$인 경우는 $a=5$, $b=1$뿐이다.

(ii) $a\le b\le 2a$인 경우




주어진 이차함수는 $0\le x\le b$에서 $x=a$일 때 최댓값이 $a^2$이므로

$a^2=9$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는

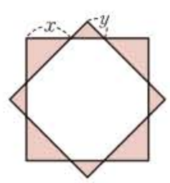
$(3,\ 3)$, $(3,\ 4)$, $(3,\ 5)$, $(3,\ 6)$의 4개

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$1+4=5$

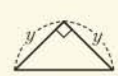
답 ③

**06** 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 색칠한 직각이등변삼각형의 짧은 변의 길이를 $x$, 다른 정사각형의 색칠한 직각이등변삼각형의 짧은 변의 길이를 $y$라 하면 8개의 교점이 생겨야 하므로




$0<x<\frac{1}{2}$

또 $1=x+\sqrt{2}y+x$에서




위의 그림에서 빗변의 길이는
$\sqrt{y^2+y^2}=\sqrt{2y^2}=\sqrt{2}y$

$y=\frac{1-2x}{\sqrt{2}}$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$$4\cdot\frac{1}{2}x^2+4\cdot\frac{1}{2}y^2=2x^2+2\cdot\frac{(1-2x)^2}{2}$$
$$=6x^2-4x+1$$
$$=6\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$$

이고, $0<x<\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{1}{3}$일 때 색칠한 부분의 넓이의 최솟값은 $\frac{1}{3}$이므로

$m=\frac{1}{3}$

$\therefore 30m=10$

답 10

# 06 여러 가지 방정식

## 개념&핵심 기출

본책 54~56쪽

**01** $P(x)=x^3-3x^2+x+5$라 하면

$P(-1)=-1-3-1+5=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 1 | $-3$ | 1 | 5 |
| | | $-1$ | 4 | $-5$ |
| | 1 | $-4$ | 5 | 0 |

$P(x)=(x+1)\times(x^2-4x+5)$

즉 주어진 방정식은

$(x+1)(x^2-4x+5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2\pm i$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=2$, $\gamma=1$이므로

$\alpha+\beta+\gamma=2$

답 2

**02** $x^2-3x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-X-20=0,\quad (X+4)(X-5)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=5$

(i) $X=-4$일 때,

$x^2-3x=-4$이므로

$x^2-3x+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 $D_1$이라 하면

$D_1=(-3)^2-4\cdot1\cdot4=-7<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=5$일 때,

$x^2-3x=5$이므로

$x^2-3x-5=0$

이 이차방정식의 판별식을 $D_2$라 하면

$D_2=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-5)=29>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근은 방정식 $x^2-3x-5=0$의 근이고, 두 허근은 방정식 $x^2-3x+4=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=-5$, $b=3$

$\therefore b-a=8$

답 8

**03** $x\ne0$이므로 주어진 방정식의 양변을 $x^2$으로 나누면

$x=0$이면 주어진 방정식은 $1=0$으로 모순이므로 $x\ne0$

$$x^2+3x+2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$
$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$$

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$$

$x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $\quad t^2+3t=0$

$t(t+3)=0 \qquad \therefore t=-3$ 또는 $t=0$

(i) $t=-3$일 때,

$x+\frac{1}{x}=-3$이므로 $\quad x^2+3x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$D=3^2-4\cdot1\cdot1=5>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $t=0$일 때,

$x+\frac{1}{x}=0$이므로 $\quad x^2+1=0 \quad \therefore x=\pm i$

즉 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근은 방정식 $x^2+3x+1=0$의 근이고, 두 허근은 방정식 $x^2+1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3,\ \gamma\delta=1$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma\delta=-2$ 답 ①

다른 풀이 $x^4+3x^3+2x^2+3x+1=0$에서

$x^4+3x^3+x^2+x^2+3x+1=0$

$x^2(x^2+3x+1)+(x^2+3x+1)=0$

$(x^2+3x+1)(x^2+1)=0$

이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이고, 이차방정식 $x^2+1=0$의 두 근이 $\gamma$, $\delta$이다.

**04** 삼차방정식 $x^3-x^2+5x-2=0$의 세 근이 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=5,\ \alpha\beta\gamma=2$

$\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(1-\gamma)(1-\alpha)(1-\beta)$

$=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=1-1+5-2=3$ 답 ⑤

$\alpha+\beta+\gamma=1$에서 $\alpha+\beta=1-\gamma$, $\beta+\gamma=1-\alpha$, $\gamma+\alpha=1-\beta$

**05** 주어진 삼차방정식의 세 양의 실근의 비가 $1:2:3$이므로 세 근을 $\alpha$, $2\alpha$, $3\alpha$ $(\alpha>0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\cdot2\alpha+2\alpha\cdot3\alpha+3\alpha\cdot\alpha=44$

$2\alpha^2+6\alpha^2+3\alpha^2=44, \quad 11\alpha^2=44$

$\alpha^2=4 \quad \therefore \alpha=2\ (\because \alpha>0)$

따라서 세 실근은 2, 4, 6이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+4+6=-a \quad \therefore a=-12$

$2\cdot4\cdot6=-b \quad \therefore b=-48$

$\therefore a+b=-60$ 답 $-60$

**06** 삼차방정식 $x^3+x^2-1=0$의 세 근이 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0,\ \alpha\beta\gamma=1$

따라서

$(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)=2(\alpha+\beta+\gamma)$

$=-2,$

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)+(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$

$=\alpha\beta+\gamma\alpha+\beta^2+\beta\gamma+\beta\gamma+\alpha\beta+\gamma^2+\gamma\alpha+\gamma\alpha+\beta\gamma+\alpha^2+\alpha\beta$

$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=(\alpha+\beta+\gamma)^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

$=(-1)^2=1,$

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(-1-\gamma)(-1-\alpha)(-1-\beta)$

$=-1-(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=-1+1-1=-1$

$\alpha+\beta+\gamma=-1$에서 $\alpha+\beta=-1-\gamma$, $\beta+\gamma=-1-\alpha$, $\gamma+\alpha=-1-\beta$

이므로 $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$를 세 근으로 하고 $x^3$의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(-2)x^2+x-(-1)=0$

$\therefore x^3+2x^2+x+1=0$ 답 ⑤

**1등급 비밀노트**

$x^3+x^2-1=0$의 세 근이 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$이므로

$x^3+x^2-1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^3+(-1)^2-1=(-1-\alpha)(-1-\beta)(-1-\gamma)$

이므로

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(-1-\gamma)(-1-\alpha)(-1-\beta)$

$=-1$

**07** 삼차방정식의 한 근이 $3+\sqrt{7}$이고, 계수가 모두 유리수이므로 $3-\sqrt{7}$도 근이다.

나머지 한 근을 $\alpha$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(3+\sqrt{7})+(3-\sqrt{7})=-p$

$\therefore \alpha+6=-p$ …… ㉠

$\alpha(3+\sqrt{7})+(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})+(3-\sqrt{7})\cdot\alpha=q$

$\therefore 6\alpha+2=q$ …… ㉡

$\alpha(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})=p$

$\therefore 2\alpha=p$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$\alpha=-2,\ p=-4$

㉡에 $\alpha=-2$를 대입하면 $\quad q=-10$

$\therefore p+q=-14$ 답 ①

참고 주어진 방정식에 $x=3+\sqrt{7}$을 대입한 후 무리수가 서로 같을 조건을 이용하여 $p$, $q$의 값을 구할 수도 있다.

**08** 삼차방정식의 한 근이

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

이고, 계수가 모두 실수이므로 $-i$도 근이다.

나머지 한 근을 $\alpha$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+i+(-i)=-a$

$\therefore \alpha=-a$ …… ㉠

$ai+i\cdot(-i)+(-i)\cdot a=b$

$\therefore b=1$ …… ㉡

$ai\cdot(-i)=-2$

$\therefore a=-2$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $a=2,\ b=1$

$\therefore a+b=3$

답 ③

**09** 사차방정식의 한 근이 $2-i$이고 계수가 모두 유리수, 즉 실수이므로 $2+i$도 근이다.
$2-i$, $2+i$를 두 근으로 하고 $x^2$의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-2+i)(x-2-i)=0$

$\therefore x^2-4x+5=0$

또 사차방정식의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이고, 계수가 모두 유리수이므로 $2-\sqrt{3}$도 근이다.
$2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$을 두 근으로 하고 $x^2$의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})=0$

$\therefore x^2-4x+1=0$

따라서

$x^4+ax^3+bx^2+cx+5$

$=(x^2-4x+5)(x^2-4x+1)$

$=x^4-8x^3+22x^2-24x+5$

이므로 $a=-8,\ b=22,\ c=-24$

$\therefore a+b+c=-10$

답 ⑤

$x^2-4x=X$로 놓고 다음과 같이 전개한다.
$(X+5)(X+1)$
$=X^2+6X+5$
$=(x^2-4x)^2+6(x^2-4x)+5$
$=x^4-8x^3+16x^2+6x^2-24x+5$
$=x^4-8x^3+22x^2-24x+5$

**10** $x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$
방정식 $x^3-1=0$의 한 허근 $\omega$는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$

$\therefore \omega-2\omega^2+3\omega^4-4\omega^5=\omega-2\omega^2+3\omega-4\omega^2$

$=4\omega-6\omega^2$

$=4\omega-6(-\omega-1)$

$=10\omega+6$

$\omega^2+\omega+1=0$에서
$\omega^2=-\omega-1$

따라서 $a=10,\ b=6$이므로

$a^2+b^2=10^2+6^2=136$

답 136

**11** $x^3=-1$, 즉 $x^3+1=0$에서

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

방정식 $x^3=-1$의 한 허근 $\omega$는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 근이고, $\omega$의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$\therefore z\overline{z}=\dfrac{\omega}{1-\omega}\cdot\overline{\left(\dfrac{\omega}{1-\omega}\right)}=\dfrac{\omega}{1-\omega}\cdot\dfrac{\overline{\omega}}{1-\overline{\omega}}$

$=\dfrac{\omega\overline{\omega}}{1-(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}}=1$

답 ⑤

**12** $x^3=1$, 즉 $x^3-1=0$에서

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

방정식 $x^3=1$의 한 허근 $\omega$는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$

$\omega^2+\omega+1=0$의 양변을 $\omega$로 나누어 정리하면

$\omega+\dfrac{1}{\omega}=-1,$

$\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\left(\omega+\dfrac{1}{\omega}\right)^2-2=-1,$

$\omega^3+\dfrac{1}{\omega^3}=1+1=2,$

$\omega^4+\dfrac{1}{\omega^4}=\omega+\dfrac{1}{\omega}=-1$

$\vdots$

$\therefore \left(\omega+\dfrac{1}{\omega}\right)+\left(\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}\right)+\left(\omega^3+\dfrac{1}{\omega^3}\right)+\cdots+\left(\omega^{10}+\dfrac{1}{\omega^{10}}\right)$

$=\{-1+(-1)+2\}\cdot3+(-1)$

$=-1$

답 ②

**13** $\begin{cases}x^2+4xy+y^2=16 & \cdots\cdots ㉠\\ x-y=2 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉡에서 $y=x-2$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$x^2+4x(x-2)+(x-2)^2=16$

$x^2-2x-2=0$

$\therefore x=1\pm\sqrt{3}$

$x=1+\sqrt{3}$일 때 $y=-1+\sqrt{3}$이고, $x=1-\sqrt{3}$일 때 $y=-1-\sqrt{3}$이므로

$x+y=\pm2\sqrt{3}$

$\therefore (x+y)^2=12$

답 12

다른 풀이 $x^2+4xy+y^2=(x-y)^2+6xy$이므로 이 식에 $x-y=2$를 대입하면

$2^2+6xy=16 \quad \therefore xy=2$

$\therefore (x+y)^2=(x-y)^2+4xy$

$=2^2+4\cdot2=12$

**14** $\begin{cases}x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2-xy+y^2=9 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $(x+y)(x-y)=0$

$\therefore y=-x$ 또는 $y=x$

(i) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-x(-x)+(-x)^2=9$

$3x^2=9,\quad x^2=3$

$\therefore x=\pm\sqrt{3},\ y=\mp\sqrt{3}$ (복호동순)

$x=\pm\sqrt{3}$을 $y=-x$에 각각 대입하면
$y=\mp\sqrt{3}$ (복호동순)

(ii) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-x^2+x^2=9,\quad x^2=9$

$\therefore x=\pm3,\ y=\pm3$ (복호동순)

$x=\pm3$을 $y=x$에 각각 대입하면
$y=\pm3$ (복호동순)

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\pm\sqrt{3} \\ y=\mp\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\pm 3 \\ y=\pm 3 \end{cases}$ (복호동순)

이므로 $2x+y$의 최댓값은 $\quad 2\cdot 3+3=9$ 답 9

$x=3$, $y=3$일 때 $2x+y$는 최댓값을 갖는다.

**15** $\begin{cases} x+y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2y+xy^2=-12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $\quad xy(x+y)=-12 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢에 ㉠을 대입하면 $\quad 3xy=-12 \quad \therefore xy=-4$

즉 $x+y=3$, $xy=-4$에서 $x$, $y$는 이차방정식

$t^2-3t-4=0$의 두 근이므로

$(t+1)(t-4)=0 \quad \therefore t=-1$ 또는 $t=4$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$

이므로 $\quad |x-y|=5$ 답 ⑤

$x+y=u$, $xy=v$를 만족시키는 $x$, $y$는 $t^2-ut+v=0$의 두 근이다.

**16** 직육면체의 가로, 세로의 길이를 각각 $a$, $b$, 높이를 $c$라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 36이므로

$4(a+b+c)=36 \quad \therefore a+b+c=9$

이 직육면체의 대각선의 길이가 $\sqrt{29}$이므로

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{29} \quad \therefore a^2+b^2+c^2=29$

이때 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$9^2=29+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=26$

이 직육면체의 부피가 24이므로 $\quad abc=24$

즉 $a$, $b$, $c$를 세 근으로 하고 $x^3$의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0$

$x^3-9x^2+26x-24=0$

$(x-2)(x^2-7x+12)=0$

$(x-2)(x-3)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=4$

따라서 직육면체의 모서리 중 길이가 가장 짧은 모서리의 길이는 2이다. 답 2

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -9 & 26 & -24 \\ & & 2 & -14 & 24 \\ \hline & 1 & -7 & 12 & \boxed{0} \end{array}$$

**17** 두 연못 $O_1$, $O_2$의 반지름의 길이를 각각 $r_1$, $r_2$라 하면 두 연못의 중심 사이의 거리가 6이므로

$r_1+r_2=6 \quad \cdots\cdots ㉠$

두 연못 $O_1$, $O_2$의 넓이의 합이 $20\pi$이므로

$\pi r_1^2+\pi r_2^2=20\pi$

$\therefore r_1^2+r_2^2=20 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠에서 $r_2=6-r_1$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$r_1^2+(6-r_1)^2=20$

$r_1^2-6r_1+8=0$

$(r_1-2)(r_1-4)=0$

$\therefore r_1=2$ 또는 $r_1=4$

따라서 $r_1=2$, $r_2=4$ 또는 $r_1=4$, $r_2=2$이므로 두 연못 $O_1$, $O_2$의 반지름의 길이의 차는

$4-2=2$ 답 2

다른 풀이 $(r_1+r_2)^2=r_1^2+2r_1r_2+r_2^2$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$6^2=20+2r_1r_2 \quad \therefore r_1r_2=8$

즉 $r_1$, $r_2$는 이차방정식 $x^2-6x+8=0$의 두 근이므로

$(x-2)(x-4)=0 \quad \therefore x=2$ 또는 $x=4$

따라서 두 연못의 반지름의 길이의 차는

$4-2=2$

**18** 꽃밭의 가로, 세로의 길이를 각각 $x$ m, $y$ m ($x>y$)라 하면 정원의 가로, 세로의 길이는 각각 $(x+3)$ m, $(y+2)$ m이고, 정원의 둘레의 길이가 50 m이므로

$2\{(x+3)+(y+2)\}=50$

$\therefore x+y=20 \quad \cdots\cdots ㉠$

또 꽃밭의 넓이가 96 $m^2$이므로

$xy=96 \quad \cdots\cdots ㉡$

즉 $x$, $y$는 이차방정식 $t^2-20t+96=0$의 두 근이므로

$(t-8)(t-12)=0$

$\therefore t=8$ 또는 $t=12$

따라서 $x=12$, $y=8$이므로 꽃밭의 가로의 길이는 12 m이다. 답 12 m

정원의 가로, 세로의 길이를 각각 $x$ m, $y$ m로 놓고 풀 수도 있다. 이때 꽃밭의 가로, 세로의 길이는 각각 $(x-3)$ m, $(y-2)$ m이다.

## 1등급을 위한 고난도 문제 본책 57~59쪽

**01** $P(x)=x^3+(a+1)x^2+2ax+a^2$이라 하면

$P(-a)=-a^3+(a+1)a^2-2a^2+a^2=0$

이므로 $P(x)=(x+a)(x^2+x+a)$로 인수분해된다.

이때 삼차방정식 $P(x)=0$이 중근을 갖는 경우는 다음 두 가지가 있다.

(i) 이차방정식 $x^2+x+a=0$이 $x=-a$를 근으로 갖는 경우

$(-a)^2+(-a)+a=0$

$a^2=0 \quad \therefore a=0$

(ii) 이차방정식 $x^2+x+a=0$이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$D=1^2-4\cdot a=0 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서

$a=0$ 또는 $a=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 합은 $\frac{1}{4}$이다. 답 $\frac{1}{4}$

다항식 $P(x)$에 대하여 $P(a)=0$이면 인수정리에 의하여 $P(x)=(x-a)Q(x)$로 인수분해된다.

**02** $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+2aX+2a-1=0$

$(X+2a-1)(X+1)=0$

$\therefore X=-2a+1$ 또는 $X=-1$

즉 $x^2=-2a+1$ 또는 $x^2=-1$이고, 방정식 $x^2=-1$은 서로 다른 두 허근을 가지므로 방정식 $x^2=-2a+1$은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

따라서 $-2a+1>0$이어야 하므로

$a<\frac{1}{2}$ 답 ①

**03** $x\neq0$이므로 주어진 방정식의 양변을 $x^2$으로 나누면

$x=0$이면 주어진 방정식은 $9=0$으로 모순이므로 $x\neq0$

$9x^2+24x-2+\frac{24}{x}+\frac{9}{x^2}=0$

$9\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+24\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0$

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

$9\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+24\left(x+\frac{1}{x}\right)-20=0$ ⋯ ❶

$x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면

$9t^2+24t-20=0,\quad (3t+10)(3t-2)=0$

$\therefore t=-\frac{10}{3}$ 또는 $t=\frac{2}{3}$ ⋯ ❷

(i) $t=-\frac{10}{3}$일 때,

$x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3}$이므로 $\quad 3x^2+10x+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 $D_1$이라 하면

$\frac{D_1}{4}=5^2-3\cdot3=16>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $t=\frac{2}{3}$일 때,

$x+\frac{1}{x}=\frac{2}{3}$이므로 $\quad 3x^2-2x+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 $D_2$라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-3\cdot3=-8<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 한 실근 $\alpha$에 대하여

$\alpha$는 실근이므로 (i)의 경우, 즉 $x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3}$을 만족시킨다.

$\alpha+\frac{1}{\alpha}=-\frac{10}{3}$ ⋯ ❸

답 $-\frac{10}{3}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 주어진 사차방정식을 $x+\frac{1}{x}$에 대한 식으로 정리할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $x+\frac{1}{x}$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |
| ❸ $\alpha+\frac{1}{\alpha}$의 값을 구할 수 있다. | 50 % |

**1등급 비밀노트**

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0\ (a\neq0)$과 같이 $x$에 대한 내림차순 또는 오름차순으로 정리하였을 때 가운데 항을 중심으로 계수가 서로 대칭인 방정식을 상반방정식이라 하며 다음과 같은 방법으로 푼다.

(1) 짝수차 상반방정식의 풀이

(i) 양변을 $x^2$으로 나눈다.

(ii) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$임을 이용하여 좌변을 정리한 후 $x+\frac{1}{x}=t$로 치환하여 주어진 방정식을 $t$에 대한 방정식으로 나타낸다.

(iii) $t$의 값을 구한 후 $t=x+\frac{1}{x}$을 대입하여 $x$의 값을 구한다.

(2) 홀수차 상반방정식의 풀이

(i) $x=-1$일 때 주어진 방정식이 성립하므로 $(x+1)f(x)=0$ 꼴로 변형한다.

(ii) $f(x)=0$은 짝수차 상반방정식이므로 (1)의 방법을 이용하여 푼다.

**04** $x^4+3x^2+4=0$에서

$(x^4+4x^2+4)-x^2=0,\quad (x^2+2)^2-x^2=0$

$(x^2+x+2)(x^2-x+2)=0$ ⋯⋯ ㉠

ㄱ. ㉠에서 $x^2+x+2=0$의 판별식을 $D_1$이라 하면

$D_1=1^2-4\cdot1\cdot2=-7<0$

이고, $x^2-x+2=0$의 판별식을 $D_2$라 하면

$D_2=(-1)^2-4\cdot1\cdot2=-7<0$

이므로 $\alpha$는 항상 허수이다.

ㄴ. ㉠에서 $x^2+x+2=0$의 한 근을 $\alpha$라 하면

$\alpha^2+\alpha=-2$

ㄷ. ㉠에서 $x^2-x+2=0$의 한 근을 $\alpha$라 하면

$\alpha^2-\alpha=-2$

또 $x^2+x+2=0$의 한 근을 $\alpha$라 하면 $\alpha^2+\alpha+2=0$에서 $\alpha^2=-\alpha-2$이므로

$\alpha^2-\alpha=(-\alpha-2)-\alpha=-2\alpha-2$

이때 ㄱ에서 $\alpha$는 허수이므로 $-2\alpha-2$도 허수이다.

따라서 $\alpha^2-\alpha=2$를 만족시키는 $\alpha$는 존재하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

**05** 삼차방정식 $x^3-12x+8=0$의 세 근이 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-12,\ \alpha\beta\gamma=-8$

$\therefore p+q$

$=(\alpha\beta^2+\beta\gamma^2+\gamma\alpha^2)+(\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha)$

$=\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)$

$\alpha+\beta+\gamma=0$에서 $\alpha+\beta=-\gamma$, $\beta+\gamma=-\alpha$, $\gamma+\alpha=-\beta$

$=\alpha^2(-\alpha)+\beta^2(-\beta)+\gamma^2(-\gamma)$

$=-(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)$

$=-\{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma\}$

$=-3\alpha\beta\gamma$

$=-3\cdot(-8)=24$ 답 24

**06** $x^3+px^2+11x+q=0$의 세 근을 $a-1$, $a$, $a+1$ ($a$는 정수)이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-1)+a+(a+1)=-p$

$\therefore 3a=-p$ …… ㉠

$(a-1)\cdot a+a(a+1)+(a-1)(a+1)=11$

$a^2=4$ $\therefore a=\pm 2$ …… ㉡

$(a-1)\cdot a\cdot(a+1)=-q$

$\therefore a^3-a=-q$ …… ㉢ ⋯➊

㉠, ㉢에 ㉡을 각각 대입하면

$p=\mp 6$, $q=\mp 6$ (복호동순) ⋯➋

$\therefore |p|+|q|=12$ ⋯➌

답 12

$a=-2$이면 세 근은 $-3$, $-2$, $-1$
$a=2$이면 세 근은 $1$, $2$, $3$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다. | 60 % |
| ➋ $p$, $q$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ➌ $\|p\|+\|q\|$의 값을 구할 수 있다. | 10 % |

**1등급 비밀노트**

문제에서 연속하는 세 정수의 조건이 주어지면 세 수를
$a-1$, $a$, $a+1$
로 놓고 풀고, 연속하는 세 홀수 또는 짝수의 조건이 주어지면 세 수를
$a-2$, $a$, $a+2$
로 놓고 푼다.

**07** 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근이 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=-c$

따라서

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{b}{c},$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{a}{c},$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{1}{c}$$

이므로 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 $x^3$의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3-\left(-\frac{b}{c}\right)x^2+\frac{a}{c}x-\left(-\frac{1}{c}\right)=0$$

$$\therefore x^3+\frac{b}{c}x^2+\frac{a}{c}x+\frac{1}{c}=0$$

이때 상수항이 1이어야 하므로 양변에 $c$를 곱하면 구하는 방정식은

$cx^3+bx^2+ax+1=0$

답 $cx^3+bx^2+ax+1=0$

**1등급 비밀노트**

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(ad\neq 0)$의 세 근이 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$이면 $dx^3+cx^2+bx+a=0$의 세 근은 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$이다.

**08** $P(x)-Q(x)=x^3-8x^2+x+4a+2=0$의 한 근이 순허수이므로 한 근을 $ki$ ($k\neq 0$인 실수)라 하면 계수가 모두 실수이므로 $-ki$도 근이다.
나머지 한 근을 $\alpha$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+ki+(-ki)=8$

$\therefore \alpha=8$

또 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$8\cdot ki+ki\cdot(-ki)+(-ki)\cdot 8=1$

$\therefore k^2=1$ …… ㉠

$8\cdot ki\cdot(-ki)=-4a-2$

$\therefore 8k^2=-4a-2$ …… ㉡

$k^2=1$에서 $k=\pm 1$이므로 두 허근은 $i$, $-i$이다.

㉠을 ㉡에 대입하면 $-4a-2=8$ $\therefore a=-\frac{5}{2}$

따라서 구하는 합은 $8+\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{11}{2}$

답 $\frac{11}{2}$

**09** 조건 (나), (다)에서 구하는 삼차방정식의 한 근이 $1+2\sqrt{2}$이고, 계수가 모두 유리수이므로 $1-2\sqrt{2}$도 근이다. ⋯➊

즉 세 근이 $\frac{1}{2}$, $1+2\sqrt{2}$, $1-2\sqrt{2}$이므로

$$\frac{1}{2}+(1+2\sqrt{2})+(1-2\sqrt{2})=\frac{5}{2},$$

$$\frac{1}{2}(1+2\sqrt{2})+(1+2\sqrt{2})(1-2\sqrt{2})+(1-2\sqrt{2})\cdot\frac{1}{2}=-6,$$

$$\frac{1}{2}(1+2\sqrt{2})(1-2\sqrt{2})=-\frac{7}{2}$$ ⋯➋

따라서 $\frac{1}{2}$, $1+2\sqrt{2}$, $1-2\sqrt{2}$를 근으로 하고 $x^3$의 계수가 2인 삼차방정식은

$$2\left(x^3-\frac{5}{2}x^2-6x+\frac{7}{2}\right)=0$$

$\therefore 2x^3-5x^2-12x+7=0$ ⋯➌

답 $2x^3-5x^2-12x+7=0$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ 나머지 한 근을 구할 수 있다. | 20 % |
| ➋ 세 근의 합, 두 근끼리의 곱의 합, 세 근의 곱을 구할 수 있다. | 50 % |
| ➌ 삼차방정식을 구할 수 있다. | 30 % |

**10** 삼차방정식 $x^3+nx^2+n^2x-p=0$의 한 근이 $a+\sqrt{2}i$이고 계수가 모두 실수이므로 $a-\sqrt{2}i$도 근이다.
나머지 한 근을 $\alpha$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(a+\sqrt{2}i)+(a-\sqrt{2}i)=-n$ …… ㉠

$\alpha(a+\sqrt{2}i)+(a+\sqrt{2}i)(a-\sqrt{2}i)+(a-\sqrt{2}i)\cdot\alpha=n^2$ …… ㉡

$\alpha(a+\sqrt{2}i)(a-\sqrt{2}i)=p$ …… ㉢

㉢에서 $a(a^2+2)=p$
이때 $p$는 소수이고 $a$, $a$는 정수이므로
$a=1,\ a^2+2=p$ …… ㉣
㉠, ㉡에 $a=1$을 각각 대입하여 정리하면
$2a+1=-n,\ a^2+2a+2=n^2$
$n=-2a-1$이므로 이것을 $a^2+2a+2=n^2$에 대입하면
$a^2+2a+2=(-2a-1)^2$
$3a^2+2a-1=0,\quad (a+1)(3a-1)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=\dfrac{1}{3}$
그런데 $a$는 정수이므로 $a=-1$
㉣에 $a=-1$을 대입하면 $p=3$ 답 ②

㉠에서 $a=-2a-n$이고 $a$는 정수, $n$은 자연수이므로 $a$는 정수이다.

$a^2\ge 0$이므로
$a^2+2\ge 2$
따라서 $a=p,\ a^2+2=1$인 경우는 성립하지 않는다.

**11** $\alpha=p+qi,\ \beta=r+si$ ($p,\ q,\ r,\ s$는 실수)라 하면 조건 (가)에 의하여
$\alpha+\overline{\alpha}=(p+qi)+(p-qi)=2p=4$
$\therefore p=2$
$\beta-\overline{\beta}=(r+si)-(r-si)=2si=4i$
$\therefore s=2$
조건 (나)에 의하여 $\beta=2\alpha$이므로
$r+2i=2(2+qi)\quad \therefore r+2i=4+2qi$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $r=4,\ q=1$
즉 $\alpha=2+i,\ \beta=4+2i$이고 주어진 사차방정식의 계수가 모두 실수이므로 $\overline{\alpha}=2-i,\ \overline{\beta}=4-2i$도 근이다.
$\alpha,\ \overline{\alpha},\ \beta,\ \overline{\beta}$를 네 근으로 하고 $x^4$의 계수가 1인 사차방정식은
$(x-2-i)(x-2+i)(x-4-2i)(x-4+2i)=0$
이므로
$x^4+ax^3+bx^2+cx+d$
$=(x-2-i)(x-2+i)(x-4-2i)(x-4+2i)$
양변에 $x=1$을 대입하면
$1+a+b+c+d$
$=(-1-i)(-1+i)(-3-2i)(-3+2i)$
$=(1-i^2)(9-4i^2)$
$=2\cdot 13=26$
$\therefore a+b+c+d=25$ 답 25

**12** 사차방정식 $x^4+ax^2+b=0$의 한 근이 $p+qi$이고, 계수가 모두 실수이므로 $p-qi$도 근이다.
이때 주어진 방정식의 한 근을 $\alpha$라 하면
$\alpha^4+a\alpha^2+b=(-\alpha)^4+a(-\alpha)^2+b=0$
이므로 $-\alpha$도 근이다.
따라서 주어진 방정식의 근은
$p+qi,\ p-qi,\ -p+qi,\ -p-qi$
이므로 모든 근의 곱은
$(p+qi)(p-qi)(-p+qi)(-p-qi)$
$=(p^2+q^2)(p^2+q^2)$
$=(p^2+q^2)^2$ 답 ④

$-(p-qi)=-p+qi,$
$-(p+qi)=-p-qi$

**13** $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2\omega+1=\sqrt{3}i$
양변을 제곱하면
$4\omega^2+4\omega+1=-3$
$4\omega^2+4\omega+4=0\quad \therefore \omega^2+\omega+1=0$
양변에 $\omega-1$을 곱하면
$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0\quad \therefore \omega^3-1=0$
ㄱ. $\omega^3=1,\ \omega^2=-\omega-1$이므로 주어진 방정식에 $x=\omega$를 대입하면
$\omega^4+a\omega^3-b\omega^2+a\omega+1=0$
$\omega+a-b(-\omega-1)+a\omega+1=0$
$(a+b+1)+(a+b+1)\omega=0$
$(a+b+1)(1+\omega)=0$
이때 $1+\omega\neq 0$이므로 $a+b+1=0$
$\therefore a+b=-1$
ㄴ. $\omega^2=-\omega-1=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\overline{\omega}$
$\omega$가 한 근이고 주어진 방정식의 계수가 모두 실수이므로 $\omega$의 켤레복소수 $\overline{\omega}$, 즉 $\omega^2$도 방정식의 한 근이다.
ㄷ. 다항식 $x^4+ax^3-bx^2+ax+1$은 $x^2+x+1$을 인수로 갖고 상수항이 1이므로
$x^4+ax^3-bx^2+ax+1$
$=(x^2+x+1)(x^2+cx+1)$ ($c$는 실수)
이라 하자.
이때 주어진 방정식이 중근인 실근을 갖기 위해서는 방정식 $x^2+cx+1=0$이 중근인 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면
$D=c^2-4=0$
$\therefore c=-2$ 또는 $c=2$
따라서 $c=-2,\ c=2$일 때 실수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는 각각 1개씩이므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 2이다.
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

$c=-2$일 때 주어진 방정식은
$x^4-x^3-x+1=0$
이므로
$a=-1,\ b=0$
또 $c=2$일 때 주어진 방정식은
$x^4+3x^3+4x^2+3x+1=0$
이므로
$a=3,\ b=-4$

**14** 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근이 $\omega$이므로
$\omega^2+\omega+1=0$
$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$
$\omega^3-1=0\quad \therefore \omega^3=1$
ㄱ. $x^2-x+1=0$에 $x=\omega^3$, 즉 $x=1$을 대입하면
$1^2-1+1\neq 0$
ㄴ. $x^2-x+1=0$에 $x=-\omega^2$을 대입하면
$\omega^4+\omega^2+1=\omega+\omega^2+1=0$
ㄷ. $\omega^3=1$에서 $\dfrac{1}{\omega}=\omega^2$
$x^2-x+1=0$에 $x=\omega^2$을 대입하면
$\omega^4-\omega^2+1=\omega-(-\omega-1)+1$
$=2\omega+2\neq 0$
이상에서 근이 될 수 있는 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

$\omega^2+\omega+1=0$에서
$\omega^2=-\omega-1$

**15** 방정식 $x^2-x+1=0$의 한 근이 $\omega$이므로

$\omega^2-\omega+1=0$

$(\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0$

$\omega^3+1=0$ $\quad\therefore \omega^3=-1$ ❶

한편 $\omega^n=\omega^{2n+1}$에서 $\omega^{2n+1}=\omega^n\cdot\omega^{n+1}$이므로

$\omega^{n+1}=1$ ❷

$\omega^3=-1$에서 $\omega^6=1$이므로 $n+1$은 6의 배수, 즉

$n+1=6,\ 12,\ 18,\ \cdots$

따라서 두 자리 자연수 $n$의 최솟값은 11이다. ❸

$n+1=12$일 때이다.

답 11

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\omega^3$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $\omega^{n+1}$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❸ 두 자리 자연수 $n$의 최솟값을 구할 수 있다. | 40 % |

**16** $x^3-1=0$에서 $\quad(x-1)(x^2+x+1)=0$

방정식 $x^3-1=0$의 한 허근 $\omega$는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$

$\therefore \omega^{4n}+(\omega+1)^{4n}+1$

$=(\omega^4)^n+(-\omega^2)^{4n}+1$

$=\omega^n+(\omega^8)^n+1$

$=\omega^n+\omega^{2n}+1$

$=\omega^{2n}+\omega^n+1$

$(-\omega^2)^{4n}=\{(-\omega^2)^4\}^n=(\omega^8)^n$

$\omega^8=(\omega^3)^2\cdot\omega^2=\omega^2$

(i) $n=3k\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때,

$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6k}+\omega^{3k}+1=3$

(ii) $n=3k+1\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$일 때,

$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6k+2}+\omega^{3k+1}+1$

$=\omega^2+\omega+1=0$

(iii) $n=3k+2\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$일 때,

$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6k+4}+\omega^{3k+2}+1$

$=\omega^4+\omega^2+1$

$=\omega+\omega^2+1=0$

이상에서 $\omega^{4n}+(\omega+1)^{4n}+1=0$을 만족시키는 자연수 $n$은 $n=3k+1$ 또는 $n=3k+2\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 꼴이므로 30 이하의 자연수 $n$의 개수는

30−(30 이하의 3의 배수의 개수)

$=30-10=20$

답 20

**17** 주어진 두 연립방정식을 동시에 만족시키는 해가 존재하므로 그 해는 연립방정식

$$\begin{cases}x+y=5 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2-y^2=15 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

의 해와 같다. ❶

㉡에서 $\quad(x+y)(x-y)=15$

$5(x-y)=15$

$\therefore x-y=3 \quad\cdots\cdots ㉢$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$x=4,\ y=1$ ❷

$x^2+ay=1,\ bx-y=4$에 $x=4,\ y=1$을 대입하여 풀면

$a=-15,\ b=\dfrac{5}{4}$ ❸

$\therefore a+b=-\dfrac{55}{4}$ ❹

답 $-\dfrac{55}{4}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 연립방정식을 세울 수 있다. | 30 % |
| ❷ $x,\ y$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❸ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다. | 10 % |

**18** $$\begin{cases}-x+y=a & \cdots\cdots ㉠\\ 2x^2+y^2=6 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $y=x+a$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$2x^2+(x+a)^2=6$

$3x^2+2ax+a^2-6=0 \quad\cdots\cdots ㉢$

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-3(a^2-6)=0$

$a^2=9$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

답 ④

**19** (i) $x\ge y$일 때,

$<2x,\ 2y>=2x,\ <x,\ y>=x$

이므로 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases}x+y^2=2x & \cdots\cdots ㉠\\ x-y+5=x & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉡에서 $\quad y=5$

㉠에 $y=5$를 대입하면

$x+25=2x \quad\therefore x=25$

(ii) $x<y$일 때,

$<2x,\ 2y>=-2y,\ <x,\ y>=-y$

이므로 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases}x+y^2=-2y & \cdots\cdots ㉢\\ x-y+5=-y & \cdots\cdots ㉣\end{cases}$$

㉣에서 $\quad x=-5$

㉢에 $x=-5$를 대입하여 정리하면

$y^2+2y-5=0$

$\therefore y=-1\pm\sqrt{6}$

(i), (ii)에서 정수인 해는 $x=25,\ y=5$이므로

$\alpha=25,\ \beta=5$

$\therefore \alpha+\beta=30$

답 30

**20** $|x^2-xy-2y^2|+|x-y-1|=0$에서 $x$, $y$는 정수, 즉 실수이므로

$$\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-y-1=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $(x-2y)(x+y)=0$이므로

$x=2y$ 또는 $x=-y$

(i) $x=2y$일 때,

이것을 ㉡에 대입하면

$y-1=0 \quad \therefore y=1$

따라서 $x=2$, $y=1$이므로 $\quad xy=2$

(ii) $x=-y$일 때,

이것을 ㉡에 대입하면

$-2y-1=0 \quad \therefore y=-\dfrac{1}{2}$

따라서 $x=\dfrac{1}{2}$, $y=-\dfrac{1}{2}$이므로 $x$, $y$가 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\quad xy=2$

답 ③

**21** 직육면체 모양의 상자의 가로의 길이가 $(14-2a)$ cm, 세로의 길이가 $(10-2a)$ cm이므로

$a(14-2a)(10-2a)=96\ (0<a<5)$ ··· ❶

$a(a-7)(a-5)=24$

$a^3-12a^2+35a-24=0$

$(a-1)(a-3)(a-8)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3\ (\because 0<a<5)$ ··· ❷

따라서 $a=3$일 때 상자의 겉넓이는 최소가 되므로 겉넓이의 최솟값은

$140-4\cdot 3^2=104\ (\text{cm}^2)$ ··· ❸

답 104 cm²

$a>0$이고 $14-2a>0$, $10-2a>0$이므로 $0<a<5$

(겉넓이) $=14\cdot 10-4a^2\ (\text{cm}^2)$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 부피를 이용하여 방정식을 세울 수 있다. | 30 % |
| ❷ $a$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❸ 겉넓이의 최솟값을 구할 수 있다. | 30 % |

**22** 반구의 반지름의 길이를 $r$라 하면 원뿔의 높이는 $r+1$이고, 아이스크림콘의 부피가 $30\pi$이므로

$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\pi r^3+\dfrac{1}{3}\pi r^2(r+1)=30\pi$

$3r^3+r^2-90=0$

$(r-3)(3r^2+10r+30)=0$

이때 $3r^2+10r+30=0$은 실근을 갖지 않으므로

$r=3$

따라서 아이스크림콘의 겉넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot 4\pi\cdot 3^2+\pi\cdot 3\cdot 5=18\pi+15\pi$

$=33\pi$

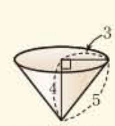
답 $33\pi$

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\dfrac{D}{4}=5^2-3\cdot 30$

$=-65<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.



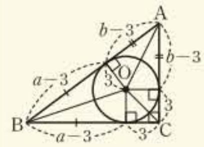

원뿔의 밑면의 반지름의 길이가 3, 높이가 4이므로 모선의 길이는

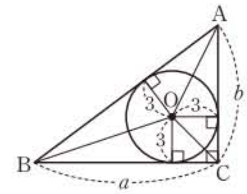
$\sqrt{3^2+4^2}=5$

**23** $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$라 하면

$\overline{AB}=(a-3)+(b-3)$

$=a+b-6$




직각삼각형 ABC의 둘레의 길이가 36이므로

$a+b+(a+b-6)=36$

$\therefore a+b=21 \quad \cdots\cdots ㉠$

내접하는 원의 중심을 O라 하면 직각삼각형 ABC의 넓이는 세 삼각형 OAB, OBC, OCA의 넓이의 합과 같으므로

$\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}\cdot(a+b-6)\cdot 3+\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot 3+\dfrac{1}{2}\cdot b\cdot 3$

$\therefore ab=6(a+b-3)$

위의 식에 ㉠을 대입하면 $\quad ab=108$

즉 $a$, $b$는 이차방정식 $x^2-21x+108=0$의 두 근이므로

$(x-9)(x-12)=0 \quad \therefore x=9$ 또는 $x=12$

따라서 직각삼각형 ABC의 세 변 중 길이가 가장 짧은 변의 길이는 9이다.

답 9

직각삼각형 ABC의 세 변의 길이는 9, 12, 15이다.

## 사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 60쪽

**01** 사차방정식 $2x^4+6x^3-x^2-6x-1=0$의 네 근이 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$이므로

$2x^4+6x^3-x^2-6x-1$

$=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$

양변에 $x=2$를 대입하면

$2(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)(2-\delta)$

$=2\cdot 2^4+6\cdot 2^3-2^2-6\cdot 2-1=63$

답 63

**02** 방정식 $x^3-ax^2+bx-c=0$의 세 근이 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=c$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$, $f(\gamma)=0$이므로

ㄱ. 방정식 $f(2x)=0$에서

$2x=\alpha$ 또는 $2x=\beta$ 또는 $2x=\gamma$

이므로 $\quad x=\dfrac{\alpha}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\beta}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\gamma}{2}$

ㄴ. 방정식 $f\left(\dfrac{x}{2}\right)=0$에서

$\dfrac{x}{2}=\alpha$ 또는 $\dfrac{x}{2}=\beta$ 또는 $\dfrac{x}{2}=\gamma$

이므로 $\quad x=2\alpha$ 또는 $x=2\beta$ 또는 $x=2\gamma$

방정식 $f\left(\dfrac{x}{2}\right)=0$의 세 근의 합이 2이므로

$2(\alpha+\beta+\gamma)=2, \quad 2a=2 \quad \therefore a=1$

ㄷ. $a=1$이므로 $\quad f(1)=1-a+b-c=0$

$\therefore a-b+c=1 \quad \cdots\cdots ㉠$

방정식 $f(2x-1)=0$에서

$$2x-1=\alpha \text{ 또는 } 2x-1=\beta \text{ 또는 } 2x-1=\gamma$$

이므로 $x=\frac{\alpha+1}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta+1}{2}$ 또는 $x=\frac{\gamma+1}{2}$

따라서 방정식 $f(2x-1)=0$의 세 근의 곱은

$$\frac{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}{8}$$
$$=\frac{\alpha\beta\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha+\beta+\gamma+1}{8}$$
$$=\frac{c+b+a+1}{8}=\frac{b+1}{4}\ (\because ㉠)$$

이므로 $\frac{b+1}{4}=0 \qquad \therefore b=-1$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

$a-b+c=1$에서
$a+c=b+1$
$\therefore \frac{c+b+a+1}{8}=\frac{2(b+1)}{8}=\frac{b+1}{4}$

**03** $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=-9$에서

$$f(\alpha)+9=f(\beta)+9=f(\gamma)+9=0$$

이므로 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$는 삼차방정식 $f(x)+9=0$, 즉 $x^3-6x^2+3x+10=0$의 세 근이다.

이때 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=6,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$$
$$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$
$$=6^2-2\cdot3=30$$

답 30

**04** $x^3=1$, 즉 $x^3-1=0$에서

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

방정식 $x^3=1$의 한 허근 $\omega$는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$$

따라서

$$f(1)=f(4)=f(7)=f(10)=f(13)=\frac{\omega}{1+\omega^2}=\frac{\omega}{-\omega}=-1,$$
$$f(2)=f(5)=f(8)=f(11)=\frac{\omega^2}{1+\omega^4}=\frac{\omega^2}{1+\omega}=\frac{\omega^2}{-\omega^2}=-1,$$
$$f(3)=f(6)=f(9)=f(12)=\frac{\omega^3}{1+\omega^6}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

이므로

$$f(1)-f(2)+f(3)-f(4)+f(5)-f(6)=0$$
$$\therefore (\text{주어진 식})=f(13)=-1$$

답 ①

참고 $\omega^n$과 관련된 문제는 $n$을 3으로 나누었을 때의 나머지가 같은 자연수끼리 분류하여 생각한다.

$f(3k+1)$ 꼴 $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

$f(3k+2)$ 꼴 $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

$f(3k)$ 꼴 $(k=1,\ 2,\ \cdots)$

**05** $x^3=1$, 즉 $x^3-1=0$에서

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

방정식 $x^3=1$의 한 허근 $\omega$는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$$

ㄱ. $a_3=1+\omega+\omega^2=0$이므로 $a_n=0$을 만족시키는 자연수 $n$의 최솟값은 3이다.

$a_1=1\neq0$, $a_2=1+\omega\neq0$

ㄴ. $a_6=(1+\omega+\omega^2)+(\omega^3+\omega^4+\omega^5)=0$이므로 $a_n=0$을 만족시키는 짝수 $n$이 존재한다.

$n=3k$ ($k$는 자연수) 꼴일 때, $a_n=0$

ㄷ. $a_{11}=a_9+\omega^9+\omega^{10}=1+\omega\ (\because a_9=0)$

이때 $a_{11}{}^2=(1+\omega)^2=(-\omega^2)^2=\omega^4=\omega$이므로 $a_{11}{}^2$은 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.

방정식 $x^2+x+1=0$의 근은

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 $a_{11}{}^2$의 실수부분은 $-\frac{1}{2}$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

**06** 주어진 사차방정식의 네 근이 $\pm\sqrt{7}$, $\pm\sqrt{3}$이고 $x^4$의 계수가 1이므로 사차방정식은

$$(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$$
$$(x^2-7)(x^2-3)=0$$
$$\therefore x^4-10x^2+21=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$(x+a)(x+b)(x-a)(x-b)+c=0$에서

$$(x^2-a^2)(x^2-b^2)+c=0$$
$$\therefore x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2+c=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\begin{cases} a^2+b^2=10 & \cdots\cdots ㉢ \\ a^2b^2+c=21 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$$

이때 $a$, $b$는 자연수이므로 ㉢에서

$$a=1,\ b=3 \text{ 또는 } a=3,\ b=1$$

이것을 ㉣에 대입하면 $c=12$

$$\therefore a+b+c=16$$

답 16

**07** 저수지에 물이 가득 찼을 때의 물의 양을 1, A펌프만을 이용하여 저수지의 물을 모두 뺄 때 걸리는 시간을 $a$시간, B펌프만을 이용하여 저수지의 물을 모두 뺄 때 걸리는 시간을 $b$시간이라 하자.

A펌프를 이용하여 저수지의 물을 모두 빼면 B펌프를 이용하여 빼는 것보다 10시간이 덜 걸리므로

$$a=b-10 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 A펌프, B펌프를 동시에 이용하여 저수지의 물을 12시간 동안 뺀 후 B펌프만을 이용하여 12시간 동안 빼면 저수지의 물을 모두 뺄 수 있으므로

$$12\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+12\cdot\frac{1}{b}=1$$
$$\therefore 12b+24a=ab \quad \cdots\cdots ㉡$$

$\frac{1}{a}$은 A펌프를 이용하여 한 시간 동안 빼는 물의 양이고, $\frac{1}{b}$은 B펌프를 이용하여 한 시간 동안 빼는 물의 양이다.

㉡에 ㉠을 대입하면

$$12b+24(b-10)=(b-10)b$$
$$b^2-46b+240=0$$
$$(b-6)(b-40)=0$$
$$\therefore b=40\ (\because b>10)$$

답 ③

$a>0$, $b>0$이고 $a=b-10$이므로
$b-10>0$
$\therefore b>10$

Ⅱ 방정식

## 만점 도전을 위한 실전 마무리 문제

본책 61~64쪽

**01** 전략 주어진 복소수를 $a+bi$ 꼴로 나타낸 후, 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

풀이 $z=(2+i)x+(1-2i)y-2i$라 하면

$z=(2x+y)+(x-2y-2)i$

$z^2=-9$에서 $\quad z=3i$ 또는 $z=-3i$

(i) $z=3i$일 때,

$(2x+y)+(x-2y-2)i=3i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2x+y=0,\ x-2y-2=3$

$\therefore x=1,\ y=-2$

(ii) $z=-3i$일 때,

$(2x+y)+(x-2y-2)i=-3i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2x+y=0,\ x-2y-2=-3$

$\therefore x=-\dfrac{1}{5},\ y=\dfrac{2}{5}$

그런데 이것은 $x$, $y$가 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $x=1,\ y=-2$이므로

$x-y=3$ 답 ③

주어진 복소수를 직접 제곱하면 계산이 복잡하므로 주어진 복소수를 $z$로 놓는다.

**02** 전략 분모의 켤레복소수를 분모, 분자에 각각 곱하여 복소수 $\alpha$를 간단히 나타낸다.

풀이 $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}=\dfrac{(\sqrt{3}+i)^2}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$이므로

$2\alpha-1=\sqrt{3}i$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4\alpha^2-4\alpha+1=-3 \quad \therefore \alpha^2-\alpha+1=0$

$\therefore \dfrac{\alpha^3-\alpha^2+\alpha-3}{\alpha^2-\alpha+3}=\dfrac{\alpha(\alpha^2-\alpha+1)-3}{\alpha^2-\alpha+3}$

$=-\dfrac{3}{2}$ 답 ①

$\alpha^2-\alpha+1=0$에서
$\alpha^2-\alpha=-1$

**03** 전략 복소수의 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\alpha=1,\ \beta=i$이면

$\alpha^2+\beta^2=1+i^2=1+(-1)=0$

이지만 $\alpha\neq0,\ \beta\neq0$이다.

ㄴ. $\alpha\neq0$이면 $\beta=\dfrac{0}{\alpha}=0$, $\beta\neq0$이면 $\alpha=\dfrac{0}{\beta}=0$이므로

$\alpha\beta=0$이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$이다.

ㄷ. $\alpha=a+bi$ ($a$, $b$는 실수)라 하면

$\beta=\overline{\alpha}=a-bi$

$\alpha\beta=(a+bi)(a-bi)=0$에서

$a^2+b^2=0$

이때 $a$, $b$는 실수이므로 $\quad a=b=0$

$\therefore \alpha=0$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

**04** 전략 복소수가 실수이면 복소수의 허수부분이 0임을 이용한다.

풀이 $(2+i)z=(2+i)(a+bi)$

$=(2a-b)+(a+2b)i$

이므로

$\overline{(2+i)z}=(2a-b)-(a+2b)i$

$\overline{(2+i)z}$가 실수이므로

$a+2b=0 \quad \therefore b=-\dfrac{1}{2}a$

따라서 점 P$(a,\ b)$가 나타내는 도형은 ②와 같이 원점을 지나고 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$인 직선이다. 답 ②

**05** 전략 음수의 제곱근의 성질을 이용한다.

풀이 $\sqrt{a}\sqrt{-b}=-\sqrt{-ab}$에서

$a<0,\ -b<0 \quad \therefore a<0,\ b>0$

$\dfrac{\sqrt{-c}}{\sqrt{d}}=-\sqrt{-\dfrac{c}{d}}$에서

$-c>0,\ d<0 \quad \therefore c<0,\ d<0$

따라서 $a$, $b$, $c$, $d$ 중 음수인 것은 $a$, $c$, $d$의 3개이다. 답 ④

**06** 전략 이차방정식이 실근을 가지려면 판별식을 $D$라 할 때, $D\geq0$이어야 함을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2-4x+a^2=0$이 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 할 때

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-a^2\geq0 \quad \therefore a^2\leq4$

$a$는 정수이므로

$a^2=0$ 또는 $a^2=1$ 또는 $a^2=4$

(i) $a^2=0$, 즉 $a=0$일 때,

$x^2-4x=0, \quad x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

(ii) $a^2=1$, 즉 $a=\pm1$일 때,

$x^2-4x+1=0 \quad \therefore x=2\pm\sqrt{3}$

그런데 $x=2\pm\sqrt{3}$은 유리수가 아니다.

(iii) $a^2=4$, 즉 $a=\pm2$일 때,

$x^2-4x+4=0, \quad (x-2)^2=0$

$\therefore x=2$

이상에서 정수 $a$는 $-2,\ 0,\ 2$의 3개이다. 답 ③

**07** 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\dfrac{8}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=7$을 $a$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=8,\ \alpha\beta=a$

$\alpha$는 이차방정식의 근이므로

$\alpha^2-8\alpha+a=0 \quad \therefore \alpha^2=8\alpha-a$

따라서

$$\frac{8}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{8\beta+\alpha^2}{\alpha\beta}=\frac{8\beta+8\alpha-a}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{8(\alpha+\beta)-a}{\alpha\beta}=\frac{64-a}{a}$$

이므로 $\frac{64-a}{a}=7$

$64-a=7a \quad \therefore a=8$

답 ②

## 08

전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha^3+\beta^3$, $(\alpha-\beta)^2$을 $a$, $b$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$

즉

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$
$$=-a^3+3ab=4 \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=a^2-4b=5 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$|\alpha-\beta|=\sqrt{5}$이므로
$(\alpha-\beta)^2=|\alpha-\beta|^2$
$=5$

㉡에서 $b=\frac{a^2-5}{4}$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$$-a^3+3a\cdot\frac{a^2-5}{4}=4, \quad a^3+15a+16=0$$

$\therefore (a+1)(a^2-a+16)=0$

$a^2-a+16=0$의 판별식을 $D$라 하면
$D=(-1)^2-4\cdot16$
$=-63<0$
이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이때 $a$는 실수이므로 $a=-1$

㉠에 $a=-1$을 대입하면

$1-3b=4 \quad \therefore b=-1$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+(-1)^2=2$

답 ②

## 09

전략 계수가 실수인 이차방정식의 한 허근이 $\alpha$이면 $\overline{\alpha}$도 근임을 이용한다.

풀이 계수가 실수인 이차방정식의 한 허근이 $\alpha$이면 $\overline{\alpha}$도 근이므로 $\overline{\alpha}=\beta$, $\overline{\beta}=\alpha$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=6$

$$\therefore \overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}=\beta\beta+\alpha\alpha=\alpha^2+\beta^2$$
$$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=4^2-2\cdot6=4$$

답 ②

## 10

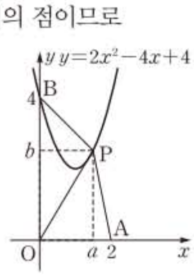
전략 두 삼각형 BOP, POA의 넓이를 각각 $a$, $b$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 이차함수 $y=2x^2-4x+4$의 그래프가 $y$축과 만나는 점의 좌표는 $(0, 4)$이므로

B$(0, 4)$

점 P$(a, b)$는 이차함수의 그래프 위의 점이므로

$b=2a^2-4a+4$




삼각형 BOP의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot4\cdot|a|=2|a|$

삼각형 POA의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot2\cdot|b|=b\ (\because b>0)$

이때 두 삼각형 BOP, POA의 넓이가 같으므로

$2|a|=b$, 즉 $2|a|=2a^2-4a+4$

$\therefore |a|=a^2-2a+2$

(i) $a\geq0$일 때,

$a=a^2-2a+2, \quad a^2-3a+2=0$

$(a-1)(a-2)=0 \quad \therefore a=1$ 또는 $a=2$

$\therefore$ P$(1, 2)$ 또는 P$(2, 4)$

(ii) $a<0$일 때,

$-a=a^2-2a+2, \quad a^2-a+2=0$

$a^2-a+2=0$의 판별식을 $D$라 하면
$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot2$
$=-7<0$
이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이때 이차방정식을 만족시키는 실수 $a$는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a+b$의 최댓값은 $a=2$, $b=4$일 때 6이다.

답 ④

## 11

전략 주어진 이차함수의 식을 $f(x)=(x-k)^2+l$ 꼴로 변형하여 최솟값을 구한다.

풀이 $f(x)=x^2+4ax+2a^2+8a$
$=(x+2a)^2-2a^2+8a$

이므로 $f(x)$는 $x=-2a$일 때 최솟값 $-2a^2+8a$를 갖는다. 즉

$g(a)=-2a^2+8a=-2(a-2)^2+8$

이므로 $g(a)$는 $a=2$일 때 최댓값 8을 갖는다.

따라서 $p=2$, $q=8$이므로 $p+q=10$

답 ③

## 12

전략 주어진 식에 $x$ 대신 $1-x$를 대입한 후 $f(x)$를 구한다.

풀이 $2f(x)+f(1-x)=3x^2 \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠에 $x$ 대신 $1-x$를 대입하면

$2f(1-x)+f(x)=3(1-x)^2 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠$\times2-$㉡을 하면

$3f(x)=3x^2+6x-3$

$\therefore f(x)=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$

따라서 $-4\leq x\leq1$에서 $f(x)$는 $x=-4$일 때 최댓값 7을 갖고, $x=-1$일 때 최솟값 $-2$를 가지므로 구하는 합은 $7+(-2)=5$

답 ⑤

## 13

전략 방정식 $h(x)=0$의 한 근이 $\alpha$이면 $h(\alpha)=0$이고 다항식 $h(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 가짐을 이용한다.

풀이 두 방정식 $f(x)+g(x)=0$, $f(x)g(x)=0$이 모두 1을 근으로 가지므로

$f(1)+g(1)=0,\ f(1)g(1)=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$g(1)=-f(1)$이므로
$f(1)g(1)=0$에서
$-\{f(1)\}^2=0$
$\therefore f(1)=0$
$\therefore g(1)=-f(1)=0$

$f(1)=0,\ g(1)=0$

따라서 두 이차식 $f(x)$, $g(x)$는 각각 $x-1$을 인수로 가지므로

$f(x)=(x-1)(x-p)$,

$g(x)=(x-1)(x-q)\ (p\neq q)$

$p=q$이면 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

로 놓으면

$f(x)+g(x)=(x-1)(2x-p-q)$

$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-p)(x-q)$

이때 방정식 $f(x)+g(x)=0$의 한 근이 3이므로

$2(6-p-q)=0$

$\therefore p+q=6$ ...... ㉠

또 방정식 $f(x)g(x)=0$의 한 근이 $-1$이므로

(i) $p=-1$일 때, ㉠에서 $q=7$

(ii) $q=-1$일 때, ㉠에서 $p=7$

(i), (ii)에서 $k=7$

답 ④

**14** 전략 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$는 삼차방정식 $x^3-1=0$의 세 근이므로

$\alpha^3=\beta^3=\gamma^3=1$

이고 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$, $\alpha\beta\gamma=1$

$$\therefore \frac{1}{\alpha^{1001}}+\frac{1}{\beta^{1001}}+\frac{1}{\gamma^{1001}}$$
$$=\frac{1}{(\alpha^3)^{333}\alpha^2}+\frac{1}{(\beta^3)^{333}\beta^2}+\frac{1}{(\gamma^3)^{333}\gamma^2}$$
$$=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$$
$$=\frac{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2}{(\alpha\beta\gamma)^2}$$
$$=\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha\beta\gamma)^2}$$
$$=0$$

답 ③

$(a+b+c)^2$
$=a^2+b^2+c^2$
$+2(ab+bc+ca)$

**15** 전략 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 $\alpha$이면 방정식 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=0$의 한 근은 $2\alpha-1$임을 이용한다.

풀이 $x^3-1=0$에서

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

이므로 $\omega$는 방정식 $x^2+x+1=0$의 근이고 다른 한 근은 $\omega$의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$ ...... ㉠

한편 $(x+1)^3=8$에서 양변을 8로 나누면 $\left(\frac{x+1}{2}\right)^3=1$

이고, $x^3=1$의 세 근이 1, $\omega$, $\overline{\omega}$이므로

$\frac{x+1}{2}=1$ 또는 $\frac{x+1}{2}=\omega$ 또는 $\frac{x+1}{2}=\overline{\omega}$

따라서 방정식 $\left(\frac{x+1}{2}\right)^3=1$의 세 근은

$x=1$ 또는 $x=2\omega-1$ 또는

$x=2\overline{\omega}-1$

$=2(-1-\omega)-1$ ($\because$ ㉠)

$=-2\omega-3$

$\therefore a+b+c+d=2+(-1)+(-2)+(-3)$

$=-4$

답 ②

방정식 $f(x)=0$의 한 근이 $\alpha$이면 방정식 $f(ax+b)=0$의 한 근은 $ax+b=\alpha$에서 $x=\frac{\alpha-b}{a}$이다. (단, $a\neq0$)

**16** 전략 먼저 $xy+2x-y-2=0$을 인수분해하여 $x$, $y$의 값을 구한다.

풀이 $\begin{cases} x^2+y^2+3xy-2x-y+2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy+2x-y-2=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $x(y+2)-(y+2)=0$

$(x-1)(y+2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $y=-2$

(i) $x=1$일 때,

㉠에 $x=1$을 대입하면

$1+y^2+3y-2-y+2=0$

$y^2+2y+1=0$, $(y+1)^2=0$

$\therefore y=-1$

(ii) $y=-2$일 때,

㉠에 $y=-2$를 대입하면

$x^2+4-6x-2x+2+2=0$

$x^2-8x+8=0$ $\therefore x=4\pm2\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4\pm2\sqrt{2} \\ y=-2 \end{cases}$

따라서 $x+y$의 최댓값은 $x=4+2\sqrt{2}$, $y=-2$일 때 $2+2\sqrt{2}$이다.

답 ④

**17** 전략 $|AB|=|A||B|$임을 이용하여 주어진 연립방정식을 푼다.

풀이 $|x^2-y^2|=8$에서 $|(x+y)(x-y)|=8$

$\therefore |x+y||x-y|=8$

이때 $|x+y|=2$이므로 $|x-y|=4$

$|x+y|=2$에서

$x+y=-2$ ...... ㉠

또는 $x+y=2$ ...... ㉡

$|x-y|=4$에서

$x-y=-4$ ...... ㉢

또는 $x-y=4$ ...... ㉣

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x=-3$, $y=1$

㉠, ㉣을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=-3$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=3$

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=-1$

따라서 $2x+y$의 최댓값은 $x=3$, $y=-1$일 때

$M=2\cdot3+(-1)=5$

이고, 최솟값은 $x=-3$, $y=1$일 때

$m=2\cdot(-3)+1=-5$

$\therefore M-m=10$

답 ⑤

**18** 전략 조건 (나)를 이용하여 복소수 $z_n$($n$은 자연수)의 규칙을 찾는다.

풀이 조건 (나)에 의하여

$z_2=\frac{1}{1-z_1}$

$$1-z_2=1-\frac{1}{1-z_1}=\frac{z_1}{z_1-1}$$이므로

$$z_3=\frac{1}{1-z_2}=\frac{z_1-1}{z_1}=1-\frac{1}{z_1}$$

$$1-z_3=1-\left(1-\frac{1}{z_1}\right)=\frac{1}{z_1}$$이므로

$$z_4=\frac{1}{1-z_3}=z_1$$

$\vdots$

즉 $z_1=z_4=z_7=\cdots=z_{199}=3+4i$이므로

$$z_{200}=\frac{1}{1-z_{199}}=\frac{1}{1-(3+4i)}=\frac{1}{-2-4i}$$

$$=\frac{1}{-2(1+2i)}=\frac{1-2i}{-2(1+2i)(1-2i)}$$

$$=\frac{1-2i}{-2\cdot5}=-\frac{1}{10}+\frac{1}{5}i$$

따라서 $p=-\frac{1}{10}$, $q=\frac{1}{5}$이므로

$$100(p+q)=100\cdot\left(-\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\right)=10$$

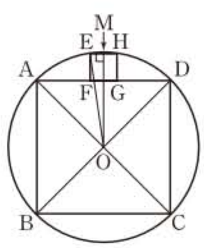
답 10

**1등급 비밀노트**

이와 같은 문제는 일반적으로 복소수 $z_n$에 대하여 $z_1$, $z_2$, $z_3$, $\cdots$의 값이 차례대로 반복되어 $z_k=z_1$이 되는 경우와 $z_n$을 $n$에 대한 식으로 나타낼 수 있는 경우가 있다. 따라서 먼저 복소수 $z_1$, $z_2$, $z_3$, $\cdots$의 값을 차례대로 구하여 어떠한 규칙이 있는지 조사해 본다.

**19** 전략 원의 중심을 O, 선분 EH의 중점을 M이라 하면 삼각형 EOM이 직각삼각형임을 이용한다.

풀이 원의 중심을 O라 하고 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 $x$라 하면 원의 반지름의 길이가 1이므로 직각삼각형 ABC에서




$$2^2=x^2+x^2$$

$$x^2=2$$

$$\therefore x=\sqrt{2}\ (\because x>0)$$

정사각형 EFGH의 한 변의 길이를 $y$라 하고 선분 EH의 중점을 M이라 하면 직각삼각형 EOM에서

$$1^2=\left(\frac{y}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$\overline{OE}=1$, $\overline{EM}=\frac{1}{2}\overline{EH}=\frac{y}{2}$, $\overline{OM}=\overline{EF}+\frac{1}{2}\overline{AB}=y+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$1=\frac{y^2}{4}+y^2+\sqrt{2}y+\frac{1}{2}$$

$$5y^2+4\sqrt{2}y-2=0$$

$$\therefore y=\frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{(2\sqrt{2})^2-5\cdot(-2)}}{5}$$

$$=\frac{-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{5}=\frac{\sqrt{2}}{5}\ (\because y>0)$$

따라서 정사각형 EFGH의 넓이는

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2=\frac{2}{25}$$

답 $\frac{2}{25}$

**20** 전략 원 $A$의 지름의 길이는 두 원 $B$, $C$의 지름의 길이의 합과 같고, 원 $B$의 지름의 길이는 두 원 $C$, $D$의 지름의 길이의 합과 같음을 이용한다.

풀이 원 $A$, $B$, $C$, $D$의 반지름의 길이를 각각 $a$, $b$, $c$, $d$라 하면 주어진 조건에서

$$a=b+c,\ b=c+d,$$

$$2(a+b)=16,\ \pi(a^2-d^2)=24\pi \quad \cdots ❶$$

$b$, $c$, $d$를 각각 $a$에 대한 식으로 나타내면

$$b=8-a,\ c=2a-8,\ d=-3a+16 \quad \cdots ❷$$

$2(a+b)=16$에서
$a+b=8$
$\therefore b=8-a$
$a=b+c$에서
$a=8-a+c$
$\therefore c=2a-8$
$b=c+d$에서
$8-a=2a-8+d$
$\therefore d=-3a+16$

이것을 $a^2-d^2=24$에 대입하면

$$a^2-(-3a+16)^2=24$$

$$a^2-12a+35=0,\quad (a-5)(a-7)=0$$

$$\therefore a=5 \text{ 또는 } a=7$$

그런데 $a=7$이면 $d=-3\cdot7+16=-5<0$이므로

$a$, $b$, $c$, $d$는 반지름의 길이이므로 모두 양수이다.

$$a=5 \quad \cdots ❸$$

따라서 원 $A$의 지름의 길이는 $2a=10$이다. ⋯ ❹

답 10

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 주어진 조건을 식으로 나타낼 수 있다. | 30 % |
| ❷ $b$, $c$, $d$를 $a$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 20 % |
| ❸ $a$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❹ 원 $A$의 지름의 길이를 구할 수 있다. | 10 % |

**21** 전략 이차방정식의 판별식 $D$에 대하여 $D=0$일 때, 이 이차방정식은 완전제곱식 꼴임을 이용한다.

풀이 주어진 이차식을 $x$에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(a+c)x^2-2bx+(a-c) \quad \cdots ❶$$

이 식이 완전제곱식이므로 이차방정식 $(a+c)x^2-2bx+(a-c)=0$의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=(-b)^2-(a+c)(a-c)=0$$

$$b^2-a^2+c^2=0 \qquad \therefore a^2=b^2+c^2 \quad \cdots ❷$$

따라서 구하는 삼각형은 빗변의 길이가 $a$인 직각삼각형이다. ⋯ ❸

답 빗변의 길이가 $a$인 직각삼각형

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 주어진 식을 $x$에 대하여 내림차순으로 정리할 수 있다. | 20 % |
| ❷ $a^2$, $b^2$, $c^2$ 사이의 관계식을 구할 수 있다. | 50 % |
| ❸ 어떤 삼각형인지 구할 수 있다. | 30 % |

참고 이차식 $f(x)$가 완전제곱식이다.
➡ 이차방정식 $f(x)=0$이 중근을 갖는다.
➡ 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식이 0이다.

**22** 전략 $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한다.

풀이 $\alpha^3+\beta^3=(n+\sqrt{n^2+1})+(n-\sqrt{n^2+1})$

$$=2n$$

또 $\alpha^3\beta^3=(n+\sqrt{n^2+1})(n-\sqrt{n^2+1})=-1$이므로

$$\alpha\beta=-1\ (\because \alpha\beta\text{는 실수})$$

이때 $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$이므로

$$2n=\left(\frac{n}{2}\right)^3-3\cdot(-1)\cdot\frac{n}{2}$$

$$2n=\frac{n^3}{8}+\frac{3}{2}n, \qquad n^3-4n=0$$

$$n(n+2)(n-2)=0$$

$\therefore n=2$ ($\because n$은 자연수)

따라서 $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$이므로 $\alpha$, $\beta$를 두 근으로 하고 $x^2$의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2-x-1=0$$

답 $x^2-x-1=0$

두 수 $\alpha$, $\beta$를 근으로 하고 $x^2$의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

**23** 전략 각 이차함수를 $y=k(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한다.

풀이 $y=x^2-6x+4a+6=(x-3)^2+4a-3$이므로 $x=3$에서 최솟값은 $4a-3$이다.

$y=-x^2+2ax=-(x-a)^2+a^2$이므로 $x=a$에서 최댓값은 $a^2$이다.

두 이차함수의 최솟값과 최댓값이 일치하므로

$$4a-3=a^2, \qquad a^2-4a+3=0$$

$$(a-1)(a-3)=0$$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

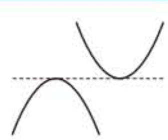
따라서 모든 실수 $a$의 값의 합은

$$1+3=4$$

답 4

**1등급 비밀노트**

두 이차함수의 최댓값과 최솟값이 일치하는 경우를 두 함수의 꼭짓점이 일치하는 경우만 생각하여 $a=3$이라고 답을 하지 않도록 한다. 오른쪽 그림과 같이 두 함수의 꼭짓점이 일치하지 않아도 최댓값과 최솟값이 일치할 수 있다.



**24** 전략 $x_1=c-x_2$로 나타낸 후 함수 $f(x_1)+g(x_2)$를 $x_2$에 대한 이차함수로 나타낸다.

풀이 $x_1=c-x_2$이므로

$$\begin{aligned} &f(x_1)+g(x_2)\\ &=f(c-x_2)+g(x_2)\\ &=(c-x_2)(15-c+x_2)+\frac{x_2(30-x_2)}{2}\\ &=-\frac{3}{2}{x_2}^2+2cx_2+15c-c^2\\ &=-\frac{3}{2}\left(x_2-\frac{2}{3}c\right)^2+15c-\frac{c^2}{3} \end{aligned}$$

즉 $x_2=\frac{2}{3}c$일 때 함수 $f(x_1)+g(x_2)$의 최댓값은 $15c-\frac{c^2}{3}$이므로

$$15c-\frac{c^2}{3}=42, \qquad c^2-45c+126=0$$

$$(c-3)(c-42)=0$$

$\therefore c=3$ 또는 $c=42$

따라서 모든 $c$의 값의 합은

$$3+42=45$$

답 45

일품 BOX

**25** 전략 $x^2-2x+2=t$로 치환하고 주어진 $x$의 값의 범위를 이용하여 $t$의 값의 범위를 구한다.

풀이 $x^2-2x+2=t$로 놓으면

$$t=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$$

이므로 $t$는 $-1\le x\le 2$에서 $x=-1$일 때 최댓값 5를 갖고, $x=1$일 때 최솟값 1을 갖는다.

$\therefore 1\le t\le 5$ ··· ❶

이때 주어진 함수는

$$y=t^2-4t-16=(t-2)^2-20$$

이므로 $1\le t\le 5$에서 $t=5$일 때 최댓값 $-11$을 갖고, $t=2$일 때 최솟값 $-20$을 갖는다. ··· ❷

따라서 최댓값과 최솟값의 곱은

$-11\cdot(-20)=220$ ··· ❸

답 220

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $x^2-2x+2=t$로 놓고 $t$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 40 % |
| ❷ 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❸ 최댓값과 최솟값의 곱을 구할 수 있다. | 20 % |

**26** 전략 방정식 $x^2-x+1=0$의 한 근이 $\omega$이면 $\omega^2-\omega+1=0$, $\omega^3=-1$이 성립함을 이용한다.

풀이 $\omega^2-\omega+1=0$이므로

$$\omega-1=\omega^2,\ \omega^2+1=\omega,\ \omega^2-\omega=-1$$

$$\begin{aligned}\therefore f(n)&=(\omega-1)^n+(\omega^2+1)^n+(\omega^2-\omega)^n\\ &=\omega^{2n}+\omega^n+(-1)^n\end{aligned}$$ ··· ❶

$\omega^2-\omega+1=0$의 양변에 $\omega+1$을 곱하면

$$(\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0$$

$\therefore \omega^3+1=0$

즉 $\omega^3=-1$이므로

$$f(1)=\omega^2+\omega-1=2\omega-2$$

$$f(2)=\omega^4+\omega^2+1=-\omega+\omega^2+1=0$$

$$f(3)=\omega^6+\omega^3-1=1-1-1=-1$$

$$f(4)=\omega^8+\omega^4+1=\omega^2-\omega+1=0$$

$$f(5)=\omega^{10}+\omega^5-1=-\omega-\omega^2-1=-2\omega$$

$$f(6)=\omega^{12}+\omega^6+1=1+1+1=3$$

$$f(7)=\omega^{14}+\omega^7-1=\omega^2+\omega-1=2\omega-2$$

$$f(8)=\omega^{16}+\omega^8+1=-\omega+\omega^2+1=0$$

$$\vdots$$

$\omega^2-\omega+1=0$에서
$\omega^2=\omega-1$

$\omega^2+1=\omega$이므로
$-\omega^2-1=-\omega$

이므로 $f(n)$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)의 값은 $2\omega-2$, $0$, $-1$, $0$, $-2\omega$, $3$이 차례대로 반복되어 나타난다. ··· ❷

따라서 $f(1)+f(2)+\cdots+f(6)=0$이므로

$f(1)+f(2)+\cdots+f(30)=0$ ··· ❸

$f(1)+\cdots+f(6)$
$=f(7)+\cdots+f(12)$
$\vdots$
$=f(25)+\cdots+f(30)$
$=0$

답 0

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f(n)$을 간단히 할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $f(n)$의 값의 규칙을 찾을 수 있다. | 50 % |
| ❸ $f(1)+f(2)+\cdots+f(30)$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

## 27

**전략** 인수분해를 이용하여 네 근을 구한 후 수직선 위에 네 점의 좌표를 나타내어 본다.

**풀이** $4x^2+4ax+a^2-9=(2x+a+3)(2x+a-3)$

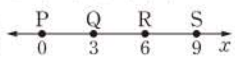
이므로 주어진 사차방정식의 네 실근은

$$x=0 \text{ 또는 } x=3 \text{ 또는 } x=\frac{-a-3}{2}$$

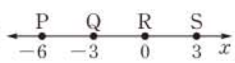
$$\text{또는 } x=\frac{-a+3}{2}$$

따라서 수직선 위에 네 실근을 좌표로 하는 네 점 P, Q, R, S가 일정한 간격으로 떨어져 있는 경우는 다음과 같이 네 가지이다.

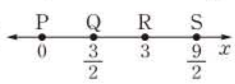
$3-0=3$, $\frac{-a+3}{2}-\frac{-a-3}{2}=3$ 이므로 좌표가 0, 3인 두 점과 $\frac{-a-3}{2}$, $\frac{-a+3}{2}$ 인 두 점 사이의 간격은 각각 3임을 이용한다.

(i) 

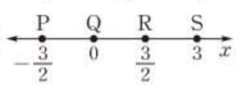

$\frac{-a-3}{2}=6$, $\frac{-a+3}{2}=9$에서 $a=-15$

(ii) 


$\frac{-a-3}{2}=-6$, $\frac{-a+3}{2}=-3$에서 $a=9$

(iii) 


$\frac{-a-3}{2}=\frac{3}{2}$, $\frac{-a+3}{2}=\frac{9}{2}$에서 $a=-6$

(iv) 


$\frac{-a-3}{2}=-\frac{3}{2}$, $\frac{-a+3}{2}=\frac{3}{2}$에서 $a=0$

이상에서 모든 실수 $a$의 값의 합은

$$-15+9+(-6)+0=-12$$

**답** $-12$

## 28

**전략** 계수가 유리수인 방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$($p$, $q$는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)이면 $p-q\sqrt{m}$도 근임을 이용한다.

**풀이** 주어진 삼차방정식의 한 근이 $1+\sqrt{3}$이고 계수가 모두 유리수이므로 $1-\sqrt{3}$도 근이다.

또 이차방정식 $x^2+ax+2=0$의 계수가 모두 유리수이므로 이 이차방정식이 $1-\sqrt{3}$을 근으로 가지면 다른 한 근은 $1+\sqrt{3}$이다.

그런데 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 2이므로

$$\alpha\neq1-\sqrt{3}$$

$(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=-2\neq2$

즉 삼차방정식의 세 근은 $\alpha$, $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$이다.

이때 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=-a$

$\therefore a=-2-\alpha$ ······ ㉠

$\alpha(1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})\cdot\alpha=b$

$\therefore b=2\alpha-2$ ······ ㉡

$\alpha(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=-c$

$\therefore c=2\alpha$ ······ ㉢

$\alpha$는 $x^2+ax+2=0$의 한 근이므로

$\alpha^2+a\alpha+2=0$ ······ ㉣

㉣에 ㉠을 대입하면

$\alpha^2+\alpha(-2-\alpha)+2=0$

$-2\alpha+2=0$ $\quad\therefore \alpha=1$

㉠, ㉡, ㉢에 $\alpha=1$을 각각 대입하면

$a=-3$, $b=0$, $c=2$

$\therefore a^2+b^2+c^2+\alpha^2=14$

**답** 14

# 최상위로 가는 최고 수준 문제

본책 65쪽

## 01

**해결 단계**

❶ 주어진 식을 간단히 한다.
❷ $i$와 $-i$의 거듭제곱의 값은 4개의 수가 반복됨을 이용하여 $m$의 값의 경우를 나누고, 각 경우마다 순서쌍 $(m, n)$의 개수를 구한다.
❸ ❷의 개수를 모두 더하여 순서쌍 $(m, n)$의 개수를 구한다.

**풀이** ❶ $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$,

$\frac{3-4i}{4+3i}=\frac{(3-4i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=\frac{-25i}{25}=-i$이므로

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m-\left(\frac{3-4i}{4+3i}\right)^n=i^m-(-i)^n$ ······ ㉠

❷ (i) $m=4k-3$ ($k=1, 2, 3, \cdots, 13$)일 때,

$i^m=i$이므로 ㉠이 실수가 되려면

$(-i)^n=i$

이어야 한다.

$\therefore n=4t-1$ ($t=1, 2, 3, \cdots, 12$)

따라서 순서쌍 $(m, n)$의 개수는

$13\cdot12=156$

(ii) $m=4k-2$ ($k=1, 2, 3, \cdots, 13$)일 때,

$i^m=-1$이므로 ㉠이 실수가 되려면

$(-i)^n=-1$ 또는 $(-i)^n=1$

이어야 한다.

$n=4s-2$ ($s=1, 2, 3, \cdots, 13$) 또는 $n=4s$ ($s=1, 2, 3, \cdots, 12$)이므로 $n$이 짝수일 때이다.

$\therefore n=2t$ ($t=1, 2, 3, \cdots, 25$)

따라서 순서쌍 $(m, n)$의 개수는

$13\cdot25=325$

(iii) $m=4k-1$ ($k=1, 2, 3, \cdots, 12$)일 때,

$i^m=-i$이므로 ㉠이 실수가 되려면

$(-i)^n=-i$

이어야 한다.

$\therefore n=4t-3$ ($t=1, 2, 3, \cdots, 13$)

따라서 순서쌍 $(m, n)$의 개수는

$12\cdot13=156$

(iv) $m=4k$ ($k=1, 2, 3, \cdots, 12$)일 때,

$i^m=1$이므로 ㉠이 실수가 되려면

$(-i)^n=-1$ 또는 $(-i)^n=1$

이어야 한다.

$\therefore n=2t\ (t=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 25)$

따라서 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

$12\cdot 25=300$

❸ 이상에서 구하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

$156+325+156+300=937$ 답 937

## 02

해결 단계

❶ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근을 $\alpha,\ \alpha+2$로 놓고 근과 계수의 관계를 이용하여 식을 세운다.
❷ 이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 자연수인 근을 $n$으로 놓고 대입하여 $a$에 대한 식을 세운다.
❸ $a$에 대한 이차방정식의 판별식을 이용하여 $n$의 값을 구한다.
❹ $a,\ b$의 값을 구한다.

풀이 ❶ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 연속하는 홀수인 자연수의 두 근을 $\alpha,\ \alpha+2$ ($\alpha$는 홀수)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+2)=-a,\ \alpha(\alpha+2)=b$

$2\alpha+2=-a$에서 $\alpha=\dfrac{-a-2}{2}$이므로

$$b=\left(\frac{-a-2}{2}\right)\cdot\left(\frac{-a-2}{2}+2\right)$$

$$=\frac{a^2}{4}-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

❷ 이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 자연수인 근을 $n$이라 하면

$$n^2+bn+a=0,\qquad n^2+\left(\frac{a^2}{4}-1\right)n+a=0$$

$$\therefore \frac{n}{4}a^2+a+n^2-n=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

❸ $a$에 대한 이차방정식 ㉡의 판별식을 $D$라 하면

$$D=1^2-4\cdot\frac{n}{4}(n^2-n)=-n^3+n^2+1$$

그런데 $n\ge 2$이면 $D<0$이므로 실수 $a$는 존재하지 않는다.

$\therefore n=1$

❹ ㉡에 $n=1$을 대입하면

$$\frac{1}{4}a^2+a=0,\qquad a\left(\frac{1}{4}a+1\right)=0$$

$a<0$이므로 $\quad a=-4$

㉠에 $a=-4$를 대입하면 $\quad b=3$

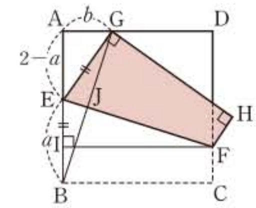
$\therefore ab=-12$ 답 $-12$

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\alpha,\ \alpha+2$ ($\alpha$는 홀수)이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$-a=\alpha+(\alpha+2)$
$\therefore a=-(2\alpha+2)$
이때 $2\alpha+2>0$이므로
$a<0$

## 03

해결 단계

❶ 삼각형의 합동과 닮음을 이용하여 $\overline{HF}$를 $a,\ b$에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 직각삼각형 AEG에서 피타고라스 정리를 이용하여 $a,\ b$ 사이의 관계식을 구한다.
❸ 사다리꼴 EFHG의 넓이를 $b$에 대한 이차함수로 나타내어 이 차함수가 최소일 때 $b$의 값을 구한다.
❹ $\dfrac{a}{b}$의 값을 구한다.




풀이 ❶ 오른쪽 그림과 같이 점 F에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 I라 하고, 두 선분 BG, EF의 교점을 J라 하자.

이때 $\triangle EBJ\equiv\triangle EGJ$ (SAS 합동)이므로

$\angle EJB=\angle EJG=90^\circ$

또 $\triangle BJE\backsim\triangle BAG$ (AA 닮음)이므로

$\angle BEJ=\angle BGA$

따라서 $\triangle FIE\equiv\triangle BAG$ (ASA 합동)이므로

$\overline{AG}=\overline{IE}=b$

에서

$\overline{CF}=\overline{BI}=\overline{BE}-\overline{EI}=a-b$

$\therefore \overline{HF}=\overline{CF}=a-b$

$\overline{EB}=\overline{EG}$, $\overline{EJ}$는 공통, $\angle BEJ=\angle GEJ$

$\angle BJE=\angle BAG=90^\circ$, $\angle B$는 공통

$\overline{FI}=\overline{BA}$, $\angle FIE=\angle BAG=90^\circ$, $\angle FEI=\angle BGA$

❷ 한편 직각삼각형 AEG에서 피타고라스 정리에 의하여

$$(2-a)^2+b^2=a^2$$

$$\therefore a=\frac{1}{4}b^2+1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{AE}=\overline{AB}-\overline{BE}$
$=2-a,$
$\overline{EG}=\overline{EB}=a$

❸ 사다리꼴 EFHG의 넓이는

$$\frac{1}{2}\{a+(a-b)\}\cdot 2$$

$$=2a-b$$

$$=2\left(\frac{1}{4}b^2+1\right)-b\ (\because ㉠)$$

$$=\frac{1}{2}b^2-b+2$$

$$=\frac{1}{2}(b-1)^2+\frac{3}{2}$$

이므로 $b=1$일 때 최솟값 $\dfrac{3}{2}$을 갖는다.

$\dfrac{1}{2}(\overline{EG}+\overline{FH})\cdot\overline{GH}$

❹ ㉠에서 $b=1$일 때 $a=\dfrac{5}{4}$이므로

$$\frac{a}{b}=\frac{5}{4}$$ 답 $\dfrac{5}{4}$

## 04

해결 단계

❶ 삼차방정식 $f(x)=0$의 켤레근의 성질을 이용하여 근을 파악한다.
❷ 조건 (나)를 이용하여 실근을 구한다.
❸ 조건 (나)를 이용하여 허근을 구한다.
❹ 실근과 허근을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 ❶ 조건 (가)에 의하여 방정식 $f(x)=0$의 한 허근을 $\beta$라 하면 계수가 실수이므로 다른 한 근은 $\beta$의 켤레복소수인 $\overline{\beta}$이고, 또 다른 한 근은 실수 $\gamma$이다.

❷ 조건 (나)에서 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 $\gamma$이면 $\gamma^3$도 근이고 $\gamma^3$은 실수이므로

$$\gamma^3=\gamma,\qquad \gamma(\gamma+1)(\gamma-1)=0$$

$$\therefore \gamma=-1 \text{ 또는 } \gamma=0 \text{ 또는 } \gamma=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$